АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Основные понятия и определения

I. Деление отрезка в данном отношении

Если даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то координаты третьей точки $C(x, y)$, лежащей с ними на одной прямой и делящей отрезок в отношении λ, определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

II. Общее уравнение прямой

Всякое уравнение первой степени относительно x и y, т.е. уравнение вида $Ax + By + C = 0$, где A, B, C — константы, определяет на плоскости некоторую прямую. Это уравнение называется *общим уравнением прямой.*

Частные случаи

1) $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax + By = 0$, проходит через начало координат.

2) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By + C = 0$, параллельна оси OX.

3) $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax + C = 0$, параллельна оси OY.

4) $B = C = 0$, $A \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax = 0$, совпадает с осью OY.

5) $A = C = 0$, $B \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By = 0$, совпадает с осью OX.

III (а). Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение имеет вид: $y = kx + b$, где $b = -\frac{C}{B}$; $k = -\frac{A}{B} = \operatorname{tg}\alpha$; *A, B, C* — коэффициенты общего уравнения прямой; α — угол, образованный прямой с положительным направлением оси OX; свободный член уравнения равен ординате точки пересечения прямой с осью OY.

III (б). Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M(x_1, y_1)$

Уравнение записывается в виде $y - y_1 = k(x - x_1)$.

III (в). Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$

Это уравнение записывается в виде

$$(y - y_1)/(y_2 - y_1) = (x - x_1)/(x_2 - x_1).$$

Угловой коэффициент этой прямой находится по формуле:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Если $x_1 = x_2$, то уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, имеет вид $x = x_1$.

Если $y_1 = y_2$, то уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, имеет вид $y = y_1$.

IV. Уравнение прямой в отрезках

Уравнение вида $x/a + y/b = 1$, где $a = -C/A$; $b = -C/B$; A, B, C — коэффициенты общего уравнения прямой, называют *уравнением прямой в отрезках*. Здесь a — абсцисса точки пересечения прямой с осью OX; b — ордината точки пересечения прямой с осью OY.

V. Нормальное уравнение прямой

Уравнение вида $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ называется *нормальным уравнением прямой*. Здесь p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую; φ — угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси OX.

Чтобы получить нормальное уравнение прямой, надо обе части общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ умножить на нормирующий множитель $\mu = 1\big/\pm\sqrt{A^2+B^2}$. Знак перед радикалом выбирают так, чтобы выполнялось условие $\mu C < 0$.

VI. Угол между прямыми

а) Острый угол φ между прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ определяется по формуле $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right|$. Прямые параллельны при $k_2 = k_1$; прямые перпендикулярны при $k_1 = -1\big/k_2$.

б) Если прямые заданы уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то угол φ между ними равен

$$\operatorname{tg}\varphi = \left(A_1 B_2 - A_2 B_1\right)\big/\left(A_1 A_2 + B_1 B_2\right).$$

Прямые параллельны при

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \;\text{ или }\; A_1/A_2 = B_1/B_2\,;$$

прямые перпендикулярны при

$$A_1 B_2 + A_2 B_1 = 0 \;\text{ или }\; A_1/B_2 = B_1/A_2\,.$$

VII. Пересечение прямых

Координаты точки пересечения прямых $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ находятся путем совместного решения уравнений

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, $y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$.

Если $A_1/A_2 \ne B_1/B_2$, то прямые имеют точку пересечения. Если $A_1/A_2 = B_1/B_2 \ne C_1/C_2$, то прямые параллельны. Если $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$, то прямые совпадают.

VIII (а).

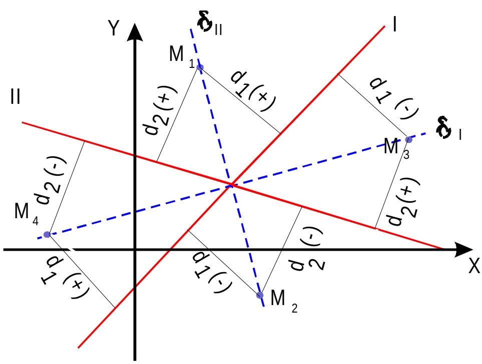
Отклонение от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле $\delta = \dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$; расстояние d от точки M до прямой равно $d=|\delta|$.

VIII (б).

Биссектрисы углов между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ описываются уравнениями

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}} \pm \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2{}^2+B_2{}^2}} = 0.$$

Выбор знака производится по рисунку.



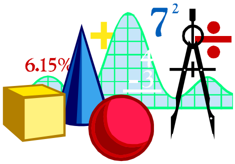
$|d_2| = |d_1|$.

IX. Пучок прямых

Если пересекающиеся прямые заданы уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2=0,$$

то уравнение $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ определяет прямую, проходящую через точку пересечения заданных прямых. Здесь λ — числовой множитель. Множество значений λ определяет *пучок прямых*, центр которого есть точка пересечения заданных прямых.



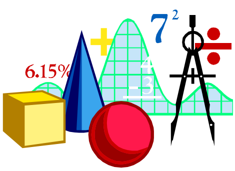
Задача 1

Составить общее уравнение прямой BC, если $B\,(–2; –1)$ и $C\,(4; 3)$.

1.1. Составьте общее уравнение прямой BC, если $B\,(–2; –1)$ и $C\,(4; 3)$. Укажите верный ответ:

- $2x-3y+1=0$;
- $2x+3y+1=0$;
- $3x-2y-1=0$.

См. III (в).



Задача 2

На плоскости даны три точки A(1; 3); B(– 2; – 1); C (4; 3). Составьте общее уравнение перпендикуляра AD, опущенного из точки A на прямую BC.

2.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А

1. Составьте уравнение прямой BC.
2. Найдите k_{BC} .
3. Найдите k_{AD} .
4. Составьте уравнение прямой AD.

Б

1. Найдите координаты вектора, параллельного AD.
2. Составьте уравнение прямой AD.

2.2. Составьте уравнение прямой BC. Укажите верный ответ:

☞ $3x-2y-1=0$; ☞ $2x-3y+1=0$; ☞ $2x+3y+1=0$.

🕮 См. III (в).

2.3. Найдите угловой коэффициент прямой BC. Укажите верный ответ:

☞ $k_{BC}=2/3$; ☞ $k_{BC}=3/2$; ☞ $k_{BC}=-2/3$.

🕮 См. III (а).

2.4. Найдите угловой коэффициент прямой AD. Укажите верный ответ:

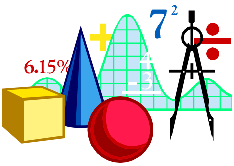
☞ $k_{AD}=-2/3$; ☞ $k_{AD}=3/2$; ☞ $k_{AD}=-3/2$.

🕮 См. VI.

2.5. Составьте уравнение прямой AD и укажите верный ответ:

☞ $3x-2y-9=0$; ☞ $3x+2y-9=0$; ☞ $2x+3y-5=0$.

🕮 См. III (б).



Задача 3

На плоскости даны точки $A(1; 3)$; $B(-2; -1)$; $C(4;3)$. Составьте уравнения биссектрис углов, образованных прямыми BC и AD. Прямые перпендикулярны.

3.1. Выберите алгоритм решения.

А	Б
1. Составьте уравнение прямой BC.	1. Составьте уравнение прямой BC.
2. Найдите k_{BC}.	2. Найдите координаты вектора, перпендикулярного BC.
3. Найдите k_{AD}.	

4. Составьте уравнение прямой AD.
5. Составьте уравнения биссектрис.

3. Составьте уравнение прямой AD.
4. Составьте уравнения биссектрис.

3.2. Составьте уравнение прямой BC. Укажите верный ответ:

☞ $2x-3y+1=0$; ☞ $3x-2y-1=0$; ☞ $2x+3y+1=0$.

🕮 См. III (в).

3.3. Найдите угловой коэффициент прямой BC. Укажите верный ответ:

☞ $k_{BC}=2/3$; ☞ $k_{BC}=3/2$; ☞ $k_{BC}=-2/3$.

🕮 См. III (а).

3.4. Найдите угловой коэффициент прямой AD. Укажите верный ответ:

☞ $k_{AD}=-2/3$; ☞ $k_{AD}=3/2$; ☞ $k_{AD}=-3/2$.

🕮 См. VI.

3.5. Составьте уравнение прямой AD. Укажите верный ответ:

☞ $3x-2y-9=0$; ☞ $3x+2y-9=0$; ☞ $2x+3y-5=0$.

🕮 См. III (б).

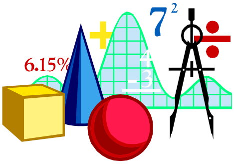
3.6. Составьте уравнения биссектрис углов, образованных прямыми BC и AD. Укажите верный ответ:

☞ $-x+5y-10=0,$
$5x+y-8=0;$

☞ $x+5y-10=0,$
$5x-y-8=0;$

☞ $x+2y-5=0,$
$-2x+y-4=0.$

🕮 См. VIII (б).



Задача 4

На плоскости даны точки $A(1, 3)$; $B(-2, -1)$; $C(4, 3)$. Составьте уравнения прямых a и b, проходящих через точку A и одинаково удаленных от точек B и C.

4.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А

1. Составьте уравнение прямой BC.
2. Найдите k_{BC}.
3. Составьте уравнение прямой a.
4. Найдите координаты точки E.
5. Составьте уравнение прямой b.
6. Выпишите уравнения прямых a и b.

Б

1. Найдите координаты точки E.
2. Составьте уравнение прямой a.
3. Составьте уравнение прямой b.
4. Выпишите уравнения прямых a и b.

4.2. Составьте уравнение прямой BC. Укажите верный ответ:

☞ $2x-3y+1=0$; ☞ $3x-2y-1=0$; ☞ $2x+3y+1=0$.

🕮 См. III (в).

4.3. Найдите угловой коэффициент прямой BC. Укажите верный ответ:

☞ $k_{BC}=2/3$; ☞ $k_{BC}=3/2$; ☞ $k_{BC}=-2/3$.

🕮 См. III (а).

4.4. Составьте уравнение прямой a, проходящей через точку A параллельно прямой BC. Укажите верный ответ:

☞ $x-y+1=0$; ☞ $2x-3y+7=0$; ☞ $-2x+3y-7=0$.

🕮 См. п. III (б).

4.5. Найдите координаты точки E — середины отрезка BC. Укажите верный ответ:

☞ $E(1; 1)$; ☞ $E(3; 1)$; ☞ $E(1; 2)$.

🕮 См. I.

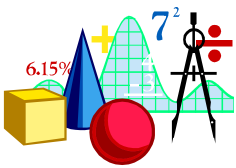
4.6. Составьте уравнение прямой b, проходящей через точки E и $A(1; 3)$. Укажите верный ответ:

☞ $x = 2$; ☞ $x = 1$; ☞ $2x + y = 0$.

🕮 См. III (в).

4.7. Выпишите уравнения прямых a и b. Укажите верный ответ:

☞ $a: x - y + 1 = 0,$ $b: x = 2;$ ☞ $a: 2x - 3y + 7 = 0,$ $b: x = 1;$ ☞ $a: -2x + 3y - 7 = 0,$ $b: 2x + y = 0.$



Задача 5

Вычислите $\operatorname{tg}\varphi$ между прямыми a и b, проходящими через точку $A(1; 3)$ и одинаково удаленными от точек $B(-2; -1)$ и $C(4; 3)$.

5.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А

1. Составьте уравнение прямой BC.
2. Составьте уравнение прямой a.
3. Составьте уравнение прямой b.
4. Найдите $\operatorname{tg}\varphi$.

Б

1. Составьте уравнение прямой BC.
2. Найдите k_{BC}.
3. Составьте уравнение прямой a.
4. Найдите координаты точки E.
5. Составьте уравнение прямой b.
6. Выпишите уравнения прямых a и b.
7. Найдите $\operatorname{tg}\varphi$ между a и b.

5.2. Составьте уравнение прямой BC. Укажите верный ответ:

☞ $2x-3y+1=0$; ☞ $3x-2y-1=0$; ☞ $2x+3y+1=0$.

🕮 См. III (в).

5.3. Найдите угловой коэффициент прямой BC. Укажите верный ответ:

☞ $k_{BC}=2/3$; ☞ $k_{BC}=3/2$; ☞ $k_{BC}=-2/3$.

🕮 См. III (а).

5.4. Составьте уравнение прямой a, проходящей через точку A параллельно прямой BC. Укажите верный ответ:

☞ $x-y+1=0$; ☞ $2x-3y+7=0$; ☞ $-2x+3y-7=0$.

🕮 См. III (б).

5.5. Найдите координаты точки E — середины отрезка BC. Укажите верный ответ:

☞ $E(1;\ 1)$; ☞ $E(3;\ 1)$; ☞ $E(1;\ 2)$.

🕮 См. I.

5.6. Составьте уравнение прямой b, проходящей через точки E и $A(1;\ 3)$. Укажите верный ответ:

☞ $x=2$; ☞ $x=1$; ☞ $2x+y=0$.

🕮 См. III (в).

5.7. Выпишите уравнения прямых a и b. Укажите верный ответ:

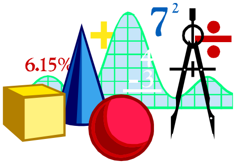
☞ $\begin{array}{l} a:\ x-y+1=0, \\ b:\ x=2; \end{array}$ ☞ $\begin{array}{l} a:\ 2x-3y+7=0, \\ b:\ x=1; \end{array}$

☞ $\begin{array}{l} a:\ -2x+3y-7=0, \\ b:\ 2x+y=0. \end{array}$

5.8. Вычислите $\operatorname{tg}\varphi$ между прямыми a и b. Укажите верный ответ:

☞ $\operatorname{tg}\varphi=3/2$; ☞ $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}/2$; ☞ $\operatorname{tg}\varphi=1/2$.

🕮 См. VI (а).



Задача 6

Найдите угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат, зная, что прямая проходит через точки $P(2; -8)$ и $Q(-1; 7)$.

6.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А

1. Составьте уравнение прямой PQ.
2. Найдите k_{PQ}.
3. Найдите отрезок, отсекаемый прямой PQ от оси ординат.

Б

1. Найдите k_{PQ}.
2. Запишите уравнение прямой PQ в отрезках.
3. Найдите отрезок, отсекаемый прямой PQ от оси OY.

6.2. Составьте уравнение прямой PQ, проходящей через точки $P(2; -8)$ и $Q(-1; 7)$. Укажите верный ответ:

☞ $y+5x+2=0$; ☞ $y-5x+2=0$; ☞ $y+5x-2=0$.

🕮 См. III (в).

6.3. Найдите угловой коэффициент прямой PQ. Укажите верный ответ:

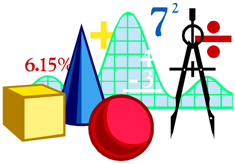
☞ $k_{PQ}=5/2$; ☞ $k_{PQ}=5$; ☞ $k_{PQ}=-5$.

🕮 См. III (а).

6.4. Найдите отрезок, отсекаемый прямой $y=-5x+2$ на оси ординат. Укажите верный ответ:

☞ $b = 2$; ☞ $b = -2$; ☞ $b = 5$.

🕮 См. IV.



Задача 7

Вычислите угол между прямыми $y = \sqrt{3}x - 5$ и $y = -\sqrt{3}x + 1$.

7.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А

1. Найдите угловые коэффициенты прямых.
2. Найдите $\operatorname{tg}\varphi$.

Б

1. Найдите $\operatorname{tg}\varphi$.

7.2. Найдите угловые коэффициенты прямых $y = \sqrt{3}x - 5$ и $y = -\sqrt{3}x + 1$. Укажите верный ответ:

☞ $k_1 = \sqrt{3}$; $k_2 = -\sqrt{3}$;

☞ $k_1 = \sqrt{3}/5$; $k_2 = \sqrt{3}$;

☞ $k_1 = 1/\sqrt{3}$; $k_2 = -1/\sqrt{3}$.

📖 См. III (а).

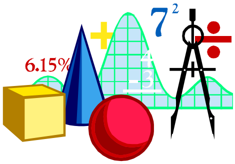
7.3. Найдите тангенс угла между прямыми $y = \sqrt{3}x - 5$ и $y = -\sqrt{3}x + 1$. Укажите верный ответ:

☞ $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$;

☞ $\operatorname{tg}\varphi = 0$;

☞ $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$.

📖 См. VI (а).



Задача 8

Даны вершины треугольника: $A(-1;2)$, $B(3;-1)$ и $C(0;4)$. Через точку A проведите прямую, параллельную стороне BC.

8.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А

1. Найдите k_{BC} .
2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку А с угловым коэффициентом, равным k_{BC} .

Б

1. Найдите координаты вектора $\overline{CB}$.
2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно $\overline{CB}$.

8.2. Найдите k_{BC} . Укажите верный ответ:

☞ $k_{BC} = -5/3$;

☞ $k_{BC} = -3/5$;

☞ $k_{BC} = 1/3$.

🕮 См. III (в).

8.3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;2)$ с угловым коэффициентом $k_{BC} = -5/3$. Укажите верный ответ:

☞ $5x + 3y - 1 = 0$;

☞ $-5x + 3y - 1 = 0$;

☞ $5x - 3y + 1 = 0$.

🕮 См. III (б).

Задача 9

Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки $P(4; -1)$ на прямую $12x - 5y - 27 = 0$.

9.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А	Б
1. Через точку P проведите прямую, перпендикулярную данной. 2. Найдите точку их пересечения. 3. Найдите расстояние от точки P до точки пересечения.	1. Найдите расстояние от точки P до прямой.

9.2. Найдите расстояние от точки P до прямой. Укажите верный ответ:

☞ $d = 2$; ☞ $d = 1/2$; ☞ $d = 12$.

🕮 См. VIII (а).

Задача 10

Напишите уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $x + 7y - 6 = 0$ и $5x - 5y + 1 = 0$. Найдите угол между биссектрисами.

10.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А	Б
1. Напишите уравнения биссектрис углов, образованных прямыми. 2. Найдите угловые коэффициенты биссектрис. 3. Найдите тангенс угла между биссектрисами.	1. Напишите уравнение биссектрис углов, образованных прямыми. 2. Найдите тангенс угла между биссектрисами.

10.2. Напишите уравнения биссектрис углов, образованных прямыми. Укажите верный ответ:

☞ $\delta_{\mathrm{I}}:\ 6x+2y-5=0,$
$\delta_{\mathrm{II}}:\ 4x-12y+7=0;$

☞ $\delta_{\mathrm{I}}:\ -6x+2y-5=0,$
$\delta_{\mathrm{II}}:\ 4x+12y-7=0;$

☞ $\delta_{\mathrm{I}}:\ 6x+2y+5=0,$
$\delta_{\mathrm{II}}:\ 4x-12y-7=0.$

🕮 См. VIII (б).

10.3. Найдите угловые коэффициенты биссектрис. Укажите верный ответ:

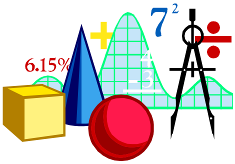
☞ $k_{\delta_{\mathrm{I}}}=-3,\ k_{\delta_{\mathrm{II}}}=1/3;$ ☞ $k_{\delta_{\mathrm{I}}}=-6,\ k_{\delta_{\mathrm{II}}}=4;$ ☞ $k_{\delta_{\mathrm{I}}}=2,\ k_{\delta_{\mathrm{II}}}=-12.$

🕮 См. III (а).

10.4. Найдите тангенс угла между биссектрисами. Укажите верный ответ:

☞ $\operatorname{tg}\varphi=\infty;$ ☞ $\operatorname{tg}\varphi=0;$ ☞ $\operatorname{tg}\varphi=20/21.$

🕮 См. VI (а) или VI (б).



Задача 11

Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(-5; 2)$ на прямую $4x - y + 3 = 0$.

11.1. Выберите алгоритм решения:

А

1. Найдите угловой коэффициент прямой.
2. Найдите угловой коэффициент перпендикуляра.
3. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A.

Б

1. Определите вектор, перпендикулярный данной прямой.
2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно вектору.

11.2. Найдите угловой коэффициент прямой. Укажите верный ответ:

☞ $k = 4$; ☞ $k = 1/4$; ☞ $k = 4/3$.

🕮 См. III (а).

11.3. Найдите угловой коэффициент перпендикуляра. Укажите верный ответ:

☞ $k_п = -1/4$; ☞ $k_п = -4$; ☞ $k_п = -3/4$.

🕮 См. VI (а).

11.4. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(-5; 2)$. Укажите верный ответ:

☞ $x + 4y - 3 = 0$;

☞ $-x + 4y - 3 = 0$;

☞ $x - 4y + 3 = 0$.

🕮 См. III (б).

Задача 12

Найдите точку пересечения прямых $8x-3y-1=0$ и $4x+y-13=0$.

12.1. Выберите алгоритм решения:

А	Б
1. Проверьте условие пересечения прямых. 2. Найдите точку пересечения прямых.	1. Найдите точку пересечения прямых.

12.2. Проверьте условие пересечения прямых. Укажите верный ответ:

☞ параллельны;

☞ перпендикулярны;

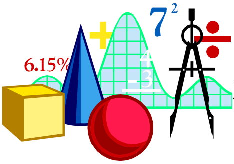
☞ пересекаются.

🕮 См. VII.

12.3. Найдите точку пересечения прямых. Укажите верный ответ:

☞ (2; 5); ☞ (1/2; 5); ☞ (– 2; 5).

🕮 См. VII.



Задача 13

Через точку пересечения прямых $2x-5y-1=0$ и $x+4y-7=0$ проведите прямую, разделяющую отрезок между точками $A(4;-3)$ и $B(1;2)$ в отношении $\lambda=2/3$.

13.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А

1. Найдите точку пересечения прямых.
2. Найдите точку E, делящую отрезок AB в отношении $\lambda=2/3$.
3. Напишите уравнение прямой.

Б

1. Найдите точку E, делящую отрезок AB в отношении $\lambda=2/3$.
2. Напишите уравнение пучка прямых.
3. Выберите нужное λ и напишите уравнение искомой прямой.

13.2. Найдите точку D — пересечение прямых. Укажите верный ответ:

☞ $D(3;1)$; ☞ $D(-3;1)$; ☞ $D(3;-1)$.

🕮 См. VII.

13.3. Найдите точку E, делящую отрезок AB в отношении $\lambda=2/3$. Укажите верный ответ:

☞ $E(-1;2)$; ☞ $E(2;-1)$; ☞ $E(-2;1)$.

🕮 См. I.

13.4. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $D(3;1)$ и $E(2;-1)$. Укажите верный ответ:

☞ $2x-y-5=0$; ☞ $2x+y-5=0$; ☞ $2x-y+5=0$.

🕮 См. III(в).

ОТВЕТЫ

1.1. $2x-3y+1=0$.

2.1. Здесь рассмотрен алгоритм А.

2.2. $2x-3y+1=0$.

2.3. $k_{BC}=2/3$.

2.4. $k_{AD}=3/2$.

2.5. $3x+2y-9=0$.

3.1. Здесь выбран алгоритм А.

3.2. $2x-3y+1=0$.

3.3. $k_{BC}=2/3$.

3.4. $k_{AD}=-3/2$.

3.5. $3x+2y-9=0$.

3.6. $x+5y-10=0$,
$5x-y-8=0$.

4.1. Здесь рассмотрен алгоритм А.

4.2. $2x-3y+1=0$.

4.3. $k_{BC}=2/3$.

4.4. $2x-3y+7=0$.

4.5. $E(1;\ 1)$.

4.6. $x = 1$.

4.7. $a:\ 2x-3y+7=0$;
$b:\ x=1$.

5.1. Здесь предлагается алгоритм Б.

5.2. $2x-3y+1=0$.

5.3. $k_{BC}=2/3$.

5.4. $2x-3y+7=0$.

5.5. $E(1;\ 1)$.

5.6. $x = 1$.

5.7. $a:\ 2x-3y+7=0$;
$b:\ x=1$.

5.8. $\operatorname{tg}\varphi = 3/2$.

6.1. В данной задаче выбран алгоритм А.

6.2. $y + 5x - 2 = 0$.

6.3. $k_{PQ} = -5$.

6.4. $b = 2$.

7.1. В данной задаче выбран алгоритм А.

7.2. $k_1 = \sqrt{3}$; $k_2 = -\sqrt{3}$.

7.3. $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$.

8.1. В данном случае выбран алгоритм А.

8.2. $k_{BC} = -5/3$.

8.3. $5x + 3y - 1 = 0$.

9.1. В данном случае выбран алгоритм Б.

9.2. $d = 2$.

10.1. В данном случае выбран алгоритм А.

10.2. $\delta_{\text{I}}:\ 6x + 2y - 5 = 0,$

$\delta_{\text{II}}:\ 4x - 12y + 7 = 0.$

10.3. $k_{\delta_I} = -3$; $k_{\delta_{II}} = 1/3$.

10.4. $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, т. е. биссектрисы перпендикулярны.

11.1. В данном случае выбран алгоритм А.

11.2. $k = 4$.

11.3. $k_{\text{п}} = -1/4$.

11.4. $x + 4y - 3 = 0$.

12.1. В данном случае выбран алгоритм А.

12.2. Прямые пересекаются.

12.3. (2; 5).

13.1. В данном случае выбран алгоритм А.

13.2. $D(3; 1)$.

13.3. $E(2; -1)$.

13.4. $2x - y - 5 = 0$.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Необходимые сведения

Плоскость

I (а). Всякое уравнение первой степени относительно точки пространства $Ax+By+Cz+D=0$ задает плоскость и, наоборот, всякая плоскость может быть задана уравнением первой степени. Здесь *A, B, C* — координаты вектора нормали

$$\overline{n}=A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k}.$$

I (б). Условие принадлежности точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ к плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ имеет вид:

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0.$$

II. Нормальное уравнение плоскости имеет вид:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

где

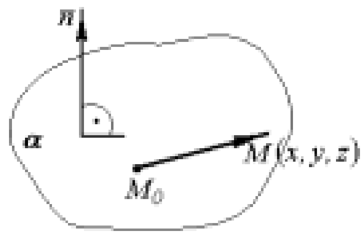
$$p=\pm D\Big/\sqrt{A^2+B^2+C^2}, \qquad \cos\beta=\pm B\Big/\sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

$$\cos\alpha=\pm A\Big/\sqrt{A^2+B^2+C^2}, \qquad \cos\gamma=\pm C\Big/\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Это уравнение можно получить из общего уравнения плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, умножив его на нормирующий множитель $\mu=\pm1\Big/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Знак нормирующего множителя должен быть противоположен знаку свободного члена *D* общего уравнения плоскости.

III (а). Уравнение плоскости в отрезках имеет вид: $x/a+y/b+z/c=1$, где $a=-D/A$, $b=-D/B$, $c=-D/C$; *a, b, c* — соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями координат.

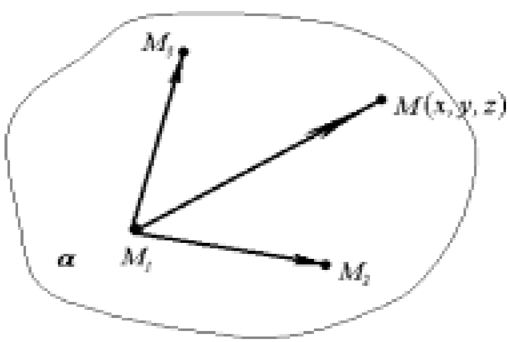
III (б). Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и перпендикулярной вектору $\overline{n}=A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k}$, имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ или в векторной форме $\left(\overline{n},\ \overline{M_0M}\right)=0.$



III (в). Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

или в векторной форме $\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}\cdot\overline{M_1M} = 0.$



III (г). Уравнение пучка плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

при произвольном значении λ определяет некоторую плоскость, проходящую через прямую пересечения плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

III (д). Условие принадлежности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости, принадлежащей пучку плоскостей, имеет вид:

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 + \lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0 .$$

Отсюда найдем λ_{M0}:

$$\lambda_{M0} = -\frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2}.$$

III (е). Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и прямую, заданную пересечением двух плоскостей

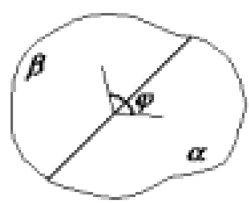
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

имеет вид:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda_{M0}(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

IV. Угол φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяем по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$



Условие параллельности плоскостей:

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2 .$$

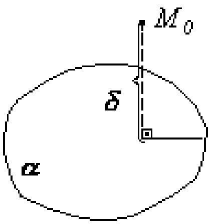
Условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Условие пересечения плоскостей:

$$A_1/A_2 \neq B_1/B_2 \neq C_1/C_2 .$$

V. Отклонение δ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, определяемой уравнением $Ax + By + Cz + D = 0,$ находим по формуле



$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

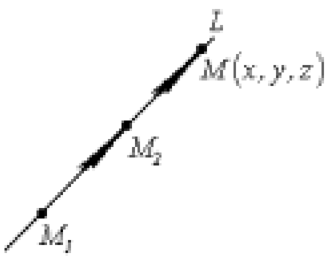
Здесь δ имеет знак, обратный знаку свободного члена D уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Расстояние от точки M_0 до плоскости $d = |\delta|$.

VI (а). Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

или в векторной форме

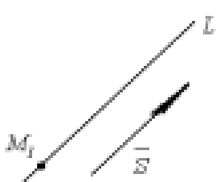


$$\overline{M_1M} = \lambda \overline{M_1M_2};$$

$$\overline{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1);$$

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).$$

VI (б). Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ параллельно вектору $\overline{S} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k},$ имеет вид $(x - x_1)/l = (y - y_1)/m = (z - z_1)/n$ — каноническое уравнение, вектор $\overline{S}$ называется *направляющим вектором прямой* L.



VI (в). Параметрическое уравнение прямой

$$\left.\begin{aligned} x &= lt + x_1 \\ y &= mt + y_1 \\ z &= nt + z_1 \end{aligned}\right\}$$

легко получить из канонического уравнения прямой, введя параметр t: $(x-x_1)/l=t$; $(y-y_1)/m=t$; $(z-z_1)/n=t$.

VI (г). Прямая в пространстве может быть задана уравнениями двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0; \end{cases} \tag{1}$$

$$\bar{n}_1=(A_1,B_1,C_1),$$
$$\bar{n}_2=(A_2,B_2,C_2).$$

Это общее уравнение прямой. Приведем его к каноническому виду:

1) найдем точку M, принадлежащую прямой. Зафиксируем любую из координат (пусть $z=z_0$). Остальные координаты найдем, решив систему (1), т. е.

$$x_0=\frac{\begin{vmatrix}(-C_1z_0-D_1) & B_1 \\ (-C_2z_0-D_2) & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}, \qquad y_0=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & (-C_1z_0-D_1) \\ A_2 & (-C_2z_0-D_2)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2\end{vmatrix}};$$

2) найдем вектор $\bar{S}$, параллельный прямой $(\bar{S}\perp\bar{n}_1;\ \bar{S}\perp\bar{n}_2)$:

$$\bar{S}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=\underbrace{(B_1C_2-B_2C_1)}_{l}\bar{i}+\underbrace{(A_2C_1-A_1C_2)}_{m}\bar{j}+$$

$$+\underbrace{(A_1B_2-A_2B_1)}_{n}\bar{k}=l\bar{i}+m\bar{j}+n\bar{k}.$$

Отсюда $(x-x_0)/l=(y-y_0)/m=(z-z_0)/n$ — канонический вид прямой.

VI (г). Если прямая задана каноническим уравнением

$$(x-x_0)/l=(y-y_0)/m=(z-z_0)/n,$$

то $\begin{cases}(x-x_0)/l=(y-y_0)/m,\\(y-y_0)/m=(z-z_0)/n\end{cases}$ задает ту же прямую как линию пересечения двух плоскостей.

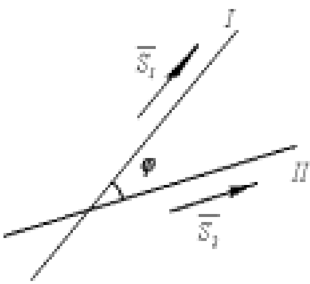
VI (д). Угол между двумя прямыми в пространстве, заданными их каноническими уравнениями

$$(x-x_1)/l_1=(y-y_1)/m_1=(z-z_1)/n_1 \quad \text{и}$$

$(x-x_2)/l_2=(y-y_2)/m_2=(z-z_2)/n_2$, определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\ \sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}},$$

где $\overline{S_1}=(l_1;\ m_1;\ n_1)$; $\quad \overline{S_2}=(l_2;\ m_2;\ n_2)$.



Условие *параллельности двух прямых*:

$$l_1/l_2=m_1/m_2=n_1/n_2.$$

Условие *перпендикулярности двух прямых*

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

VI (е). Условие компланарности двух прямых, заданных их каноническими уравнениями

$$(x-x_1)/l_1=(y-y_1)/m_1=(z-z_1)/n_1$$

и $(x-x_2)/l_2=(y-y_2)/m_2=(z-z_2)/n_2$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0.$$

Если величины l_1, m_1, n_1 не пропрциональны величинам l_2, m_2, n_2, то условие компланарности будет необходимым и достаточным условием пересечения двух прямых в пространстве.

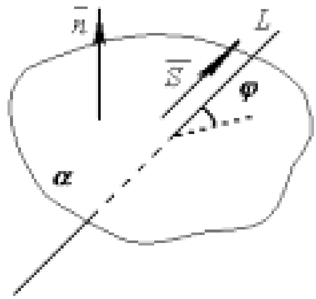
VII. Угол между пространственной прямой

$$(x-x_1)/l_1=(y-y_1)/m_1=(z-z_1)/n_1$$

и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{lA+Bm+Cn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\ \sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где $\bar{S}=\{l,m,n\}$, $\bar{n}=\{A,B,C\}$.



Условие параллельности прямой и плоскости:

$$Al+Bm+Cn=0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$A/l=B/m=C/n.$$

VIII. Для определения точки пересечения пространственной прямой

$$(x-x_0)/l=(y-y_0)/m=(z-z_0)/n$$

с плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ нужно решить систему, записав параметрическое уравнение прямой

$$x=x_0+lt,\ \ y=y_0+mt,\ \ z=z_0+nt$$

и уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Из уравнения плоскости определим параметр t:

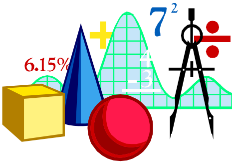
$$t=-\frac{D+Ax_0+By_0+Cz_0}{Al+Bm+Cn}.$$

Затем находим значения координат x, y, z через первые три уравнения системы.

Если $Al+Bm+Cn\neq 0$, то прямая пересекает плоскость.

Если $Al+Bm+Cn=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то прямая параллельна плоскости.

Если $Al+Bm+Cn=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то прямая лежит в плоскости.



Задача 1

Убедившись в том, что плоскости

$$\alpha: 2x+4y-4z+12=0 \quad \text{и} \quad \beta: x-3y+z=0$$

пересекаются, составьте каноническое уравнение их линии пересечения (прямая *a*).

1.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А

1. Исследуйте расположение плоскостей.
2. Найдите точку $M_1 \in a$.
3. Найдите направляющий вектор $\bar{S}$ прямой *a*.
4. Составьте канонический вид уравнения прямой *a*.

Б

1. Найдите направляющий вектор $\bar{S}$ прямой *a*.
2. Найдите точку $M_1 \in a$.
3. Составьте каноническое уравнение прямой *a*.

1.2. Исследуйте расположение плоскостей:

$$\alpha: 2x+4y-4z+12=0 \quad \text{и} \quad \beta: x-3y+z=0.$$

Укажите верный ответ:

☞ пересекаются; ☞ параллельны; ☞ совпадают.

🕮 См. IV.

1.3. Найдите точку $M_1(x_1, y_1, z_1,) \in$ прямой *a*. Укажите верный ответ:

☞ $(4z_1, z_1, z_1)$; ☞ $\left(\frac{4z_1+18}{5}, \frac{z_1-6}{5}, z_1\right)$;

☞ $\left(\frac{4z_1-18}{5}, \frac{3z_1-6}{5}, z_1\right)$.

🕮 См. VI (г).

1.4. Найдите направляющий вектор $\overline{S}$ прямой a. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{S}(-4,\ 3,\ 1)$; ☞ $\overline{S}(4,\ 3,\ 5)$; ☞ $\overline{S}(4,\ -3,\ 5)$.

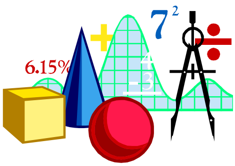
🕮 См. VI (г).

1.5. Составьте канонические уравнения прямой a. Укажите верный ответ:

☞ $\dfrac{x+x_1}{4}=\dfrac{y-y_1}{-3}=\dfrac{z-z_1}{5}$; ☞ $\dfrac{x-x_1}{-4}=\dfrac{y+y_1}{3}=\dfrac{z-z_1}{1}$;

☞ $\dfrac{x-x_1}{4}=\dfrac{y-y_1}{3}=\dfrac{z-z_1}{5}$.

🕮 См. VI (г).



Задача 2

Составьте уравнение перпендикуляра AB, опущенного из точки A (1, 1, 0) на плоскость $\alpha: 2x+4y-4z+12=0$.

2.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А	Б
1. Найдите направляющий вектор $\overline{S}$ прямой AB. 2. Составьте канонические уравнения прямой AB.	1. Найдите точку пересечения перпендикуляра AB с плоскостью α. 2. Составьте канонические уравнения прямой AB.

2.2. Найдите направляющий вектор $\overline{S}$ прямой AB. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{S}(1,\ 4,\ 0)$; ☞ $\overline{S}(1,\ 2,\ 6)$; ☞ $\overline{S}(2,\ 4,\ -4)$.

🕮 См. VI (а).

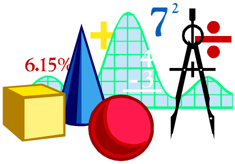
2.3. Составьте каноническое уравнение прямой AB. Укажите верный ответ:

☞ $(x-1)/1=(y+1)/4=z/0$;

☞ $(x-1)/2=(y-1)/4=z/-4$;

☞ $(x+1)/1=y/2=(z-1)/6$.

🕮 См. VI (б).



Задача 3

Составьте уравнение плоскости γ, проходящей через точку $A(1,\ 1,\ 0)$ перпендикулярно к двум плоскостям:

$$\alpha:\ 2x+4y-4z+12=0 \quad \text{и} \quad \beta:\ x-3y+z=0.$$

3.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А	Б
1. Найдите нормали к плоскостям α и β. 2. Найдите нормаль $\overline{n}_\gamma$ к плоскости γ, т. е. $\overline{n}_\gamma$ — перпендикулярный к $\overline{n}_\alpha$ и $\overline{n}_\beta$. 3. Составьте уравнение плоскости γ.	1. Составьте уравнение плоскости γ, проходящей через точку A. 2. Найдите координаты нормали $\overline{n}_\gamma$ из условия перпендикулярности плоскости γ с плоскостями α и β. 3. Запишите уравнение плоскости γ.

3.2. Найдите нормали к плоскостям α и β, т. е. $\overline{n}_\alpha$, $\overline{n}_\beta$. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{n}_\alpha=(2,\ 4,\ -4)$, $\overline{n}_\beta=(1,\ -3,\ 1)$; ☞ $\overline{n}_\alpha=(1,\ 2,\ -2)$, $\overline{n}_\beta=(1,\ 3,\ 0)$; ☞ $\overline{n}_\alpha=(1,\ 4,\ 0)$, $\overline{n}_\beta=(1,\ 3,\ 1)$.

🕮 См. I (а).

3.3. Найдите вектор, перпендикулярный $\bar{n}_\alpha$ и $\bar{n}_\beta$. Укажите верный ответ:

☞ $\bar{n}_\gamma = (-4,\ 5,\ 3)$; ☞ $\bar{n}_\gamma = (4,\ 3,\ 5)$; ☞ $\bar{n}_\gamma = (2,\ -3,\ 3)$.

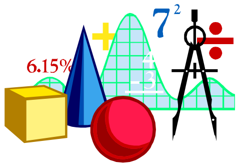
🕮 См. VI (г).

3.4. Составить уравнение плоскости γ, проходящей через точку A (1, 1, 0) и $\perp \bar{n}_\gamma$. Укажите верный ответ:

☞ $2x-3y+3z+1=0$; ☞ $4x+3y+5z-7=0$;

☞ $-4x+5y+3z=0$.

🕮 См. III (б).



Задача 4

Составьте уравнение плоскости δ, проходящей через точку $A(1, 1, 0)$ и прямую, заданную как линия пересечения плоскостей $\alpha:\ 2x+4y-4z+12=0$ и $\beta:\ x-3y+z=0$.

4.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А	Б
1. Составьте каноническое уравнение прямой.	1. Составьте пучок плоскостей.
2. Найдите направляющий вектор прямой и точку, через которую проходит прямая, т.е. точку M_1.	2. Найдите λ, при котором точка A лежит в одной из плоскостей, принадлежащих пучку.
3. Найдите вектор $\overline{AM_1}$ и нормаль плоскости δ.	3. Составьте уравнение плоскости δ.
4. Составьте уравнение плоскости δ.	

4.2. Составьте пучок плоскостей. Укажите верный ответ:

☞ $2\lambda x+(4-3\lambda)y-4\lambda z+12=0$; ☞ $\lambda x+(4+3\lambda)y+4z+5=0$;

☞ $(2+\lambda)x+(4-3\lambda)y+(-4+\lambda)z+12=0$.

🕮 См. III (г).

4.3. Найдите λ, при котором точка $A(1, 1, 0)$ лежит в одной из плоскостей, принадлежащих пучку. Укажите верный ответ:

☞ 9;   ☞ – 2;   ☞ 1/9.

🕮 См. III (д).

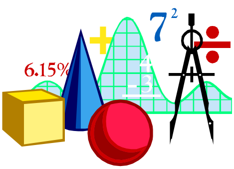
4.4. Составьте уравнение плоскости δ. Укажите верный ответ:

☞ $11x-23y+5z+12=0;$

☞ $10y-6z+12=0;$

☞ $2x+y-3z+12=0.$

🕮 См. III (е).



Задача 5

Вычислите расстояние d от точки A (1, 1, 0) до плоскости $2x+4y-4z+12=0.$

5.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А	Б
1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно данной плоскости. 2. Найдите точку C пересечения прямой с данной плоскостью. 3. Найдите вектор $\overline{AC}$ и его длину.	1. Проверьте условие принадлежности точки A плоскости α. 2. Найдите расстояние от точки A до плоскости α.

5.2. Проверьте условие принадлежности точки A (1, 1, 0) плоскости $2x+4y-4z+12=0.$ Укажите верный ответ:

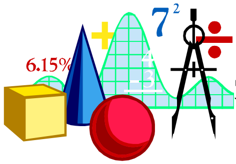
☞ принадлежит;   ☞ не принадлежит.

🕮 См. I (б).

5.3. Найдите расстояние от точки A (1, 1, 0) до плоскости $2x+4y-4z+12=0$. Укажите верный ответ:

☞ 2; ☞ 3; ☞ 1.

🕮 См. V.



Задача 6

Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;-1;4)$ и $B(3;2;-1)$ перпендикулярно плоскости

$$x+y+2z-3=0.$$

6.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А

1. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$ и нормаль данной плоскости $\bar{n}_\alpha$.
2. Найдите нормаль $\bar{n}_\beta$ искомой плоскости, т. е. вектор, перпендикулярный $\overline{AB}$ и $\bar{n}_\alpha$.
3. Составьте уравнение плоскости β, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\bar{n}_\beta$.

Б

1. Запишите уравнение плоскости β, проходящей через точку A.
2. Найдите координаты нормали плоскости β, используя условия: а) принадлежности точки B плоскости β; б) перпендикулярности плоскостей α и β.
3. Составьте уравнение плоскости β.

6.2. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$ и нормаль $\bar{n}_\alpha$ данной плоскости. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{AB}=(1;\ 3;\ -5);\ \bar{n}_\alpha=(1;\ 1;\ 2);$

☞ $\overline{AB}=(-1;\ 3;\ -5);\ \bar{n}_\alpha=(1;\ 1;\ -3);$

☞ $\overline{AB}=(5;\ 1;\ 3);\ \bar{n}_\alpha=(3;\ 3;\ 3/2).$

🕮 См. I (а), VI (а).

6.3. Найдите нормаль $\overline{n}_\beta$ искомой плоскости, т. е. вектор, перпендикулярный $\overline{AB} = (1;\ 3;\ -5)$ и $\overline{n}_\alpha = (1;\ 1;\ 2)$. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{n}_\beta = (1; -3; 4)$; ☞ $\overline{n}_\beta = (11; -7; -2)$; ☞ $\overline{n}_\beta = (11; 7; -2)$.

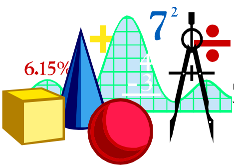
🕮 См. VI (г).

6.4. Составьте уравнение плоскости β, проходящей через точку $A(2;\ -1;\ 4)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}_\beta = (11; -7; -2)$. Укажите верный ответ:

☞ $11x + 7y - 2z + 3 = 0$; ☞ $11x - 7y - 2z - 21 = 0$;

☞ $x - 3y + 4z + 2 = 0$.

🕮 См. III (б).



Задача 7

Найдите ортогональную проекцию точки $M(1;\ 1;\ 1)$ на плоскость $x + y - 2z - 6 = 0$.

7.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А

1. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости $x + y - 2z - 6 = 0$.
2. Найдите точку пересечения прямой с плоскостью.

Б

1. Найдите нормаль $\overline{n}_\alpha$ к плоскости $x + y - 2z - 6 = 0$.
2. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку M параллельно $\overline{n}_\alpha$ (перпендикулярно данной плоскости).
3. Найдите точку C пересечения прямой с плоскостью α. (C — проекция точки M на плоскость α.)

7.2. Найдите нормаль плоскости α: $x+y-2z-6=0$. Укажите верный ответ:

☞ $\bar{n}_\alpha\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6};-\frac{1}{3}\right)$; ☞ $\bar{n}_\alpha(1;1;-2)$; ☞ $\bar{n}_\alpha(-1;-1;-2)$.

🕮 См. I (а).

7.3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;\ 1;\ 1)$ параллельно вектору $\bar{n}_\alpha=(1;\ 1;\ -2)$. Укажите верный ответ:

☞ $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-2}$; ☞ $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-2}$;

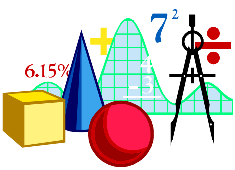
☞ $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$.

🕮 См. VI (б).

7.4. Найдите точку C пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$ с плоскостью $x+y-2z-6=0$. Укажите верный ответ:

☞ $C(-2;1;-1)$; ☞ $C(2;2;-1)$; ☞ $C(2;0;1)$.

🕮 См. VIII.



Задача 8

Вычислите угол между плоскостями

$$\alpha:\ 4x-5y+3z-1=0 \ \text{ и } \ \beta:\ x-4y-z+9=0.$$

8.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А

1. Вычислите $\cos\varphi$, где $\varphi=\widehat{\alpha\beta}$.

Б

1. Найдите нормали плоскостей: $\bar{n}_\alpha$ и $\bar{n}_\beta$.

2. Найдите $\cos\widehat{\bar{n}_\alpha\bar{n}_\beta}$.

8.2. Найдите нормали плоскостей α и β — $\bar{n}_\alpha$ и $\bar{n}_\beta$. Укажите верный ответ:

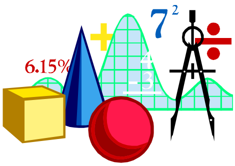
☞ $\bar{n}_\alpha = (-4;-5;3);\quad \bar{n}_\beta = \left(\frac{1}{9};\frac{4}{9};\frac{1}{9}\right);$ ☞ $\bar{n}_\alpha = (4;-5;3);\quad \bar{n}_\beta = (1;-4;-1);$ ☞ $\bar{n}_\alpha = (-4;5;-3);\quad \bar{n}_\beta = (1;4;-1).$

🕮 См. I (а).

8.3. Найдите угол между нормалями $\bar{n}_\alpha$ и $\bar{n}_\beta$. Укажите верный ответ:

☞ $\cos\varphi = 9/10$; ☞ $\cos\varphi = 7/(5\sqrt{2})$; ☞ $\cos\varphi = 7/10$.

🕮 См. IV.



Задача 9

Даны точки $A(-1;2;3)$ и $B(2;-3;1)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;-1;2)$ параллельно вектору $\overline{AB}$.

9.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А	Б
1. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$. 2. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку M параллельно вектору $\overline{AB}$.	1. Найдите координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AM}$ и $\left[\overline{AB}, \overline{AM}\right]$. 2. Составьте уравнение прямой.

9.2. Найдите координаты вектора $\overline{AB}$, если $A(-1;2;3)$ и $B(2;-3;1)$. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{AB} = (1;-1;4)$; ☞ $\overline{AB} = (-3;5;-2)$; ☞ $\overline{AB} = (3;-5;-2)$.

🕮 См. VI (а).

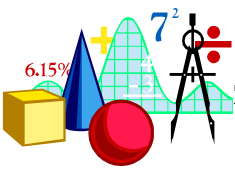
9.3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;-1;2)$ параллельно вектору $\overline{AB}=(3;-5;-2)$. Укажите верный ответ:

☞ $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{-2}$;

☞ $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z+2}{-2}$;

☞ $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$.

🕮 См. VI (б).



Задача 10

Найдите угол между прямыми $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z+4}{2}$ и $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$.

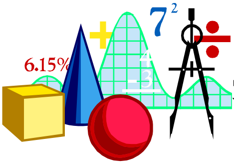
10.1. Найдите угол между данными прямыми. Укажите верный ответ:

☞ $\sin\varphi=-6/\sqrt{510}$;

☞ $\cos\varphi=-6/\sqrt{510}$;

☞ $\operatorname{tg}\varphi=6/10$.

🕮 См. VI (д).



Задача 11

Найдите проекцию точки $M(1;\ 1;\ 1)$ на прямую

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}.$$

11.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А

1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой.
2. Найдите точку пересечения прямой с плоскостью.

Б

1. Найдите направляющий вектор прямой.
2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно вектору.
3. Найдите проекцию точки на прямую (достаточно найти точку пересечения прямой с плоскостью).

11.2. Найдите направляющий вектор прямой

$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{l}=(2;3;-1)$; ☞ $\overline{l}=(1;0;-1)$; ☞ $\overline{l}=(2;-3;-1)$.

🕮 См. VI (б).

11.3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;\ 1;\ 1)$ перпендикулярно вектору $\overline{l}=(2;3;-1)$. Укажите верный ответ:

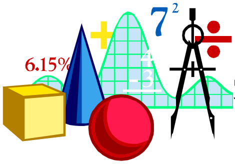
☞ $2x+3y-z-4=0$; ☞ $x+y+z-4=0$; ☞ $2x-3y+z-1=0$.

🕮 См. III (б).

11.4. Найдите точку C пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ с плоскостью $2x+3y-z-4=0$. Укажите верный ответ:

☞ $C(8;\ 3;\ -15)$; ☞ $C(1;\ 2;\ 0)$; ☞ $C\left(\frac{8}{7};\ \frac{3}{14};\ -\frac{15}{14}\right)$.

🕮 См. VIII.



Задача 12

Найдите уравнение проекции прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ на плоскость $x+y+2z-5=0$.

12.1. Выберите алгоритм решения задачи:

А	Б
1. Запишите уравнение прямой в виде линии пересечения двух плоскостей. 2. Составьте уравнение пучка плоскостей. Выберите λ из условия перпендикулярности плоскостей. 3. Запишите уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости $x+y+2z-5=0$. 4. Найдите уравнение проекции.	1. Через прямую проведите плоскость γ, перпендикулярную данной плоскости α. 2. Запишите уравнение проекции прямой l как линии пересечения плоскостей γ и α.

12.2. Запишите уравнение прямой в виде линии пересечения двух плоскостей. Укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases}2x+y+3=0;\\3x-z-3=0;\end{cases}$ ☞ $\begin{cases}2x-y-3=0;\\3x-z+3=0;\end{cases}$ ☞ $\begin{cases}2x-y-3=0;\\3x-z-3=0.\end{cases}$

🕮 См. VI (г′).

12.3. Составьте уравнение пучка плоскостей. Выберите λ из условия перпендикулярности плоскости, заданной пучком плоскостей, с плоскостью $x+y+2z-5=0$. Укажите верный ответ:

☞ $(2+3\lambda)x-y-\lambda z-3(1+\lambda)=0,\ \lambda=-1;$

☞ $(2-3\lambda)x-y-\lambda z+3(1+\lambda)=0,\ \lambda=0;$

☞ $3\lambda x+y+(1-\lambda)z-3\lambda=0,\ \lambda=2.$

🕮 См. III (г), IV.

12.4. Запишите уравнение плоскости (из пучка плоскостей), перпендикулярной плоскости $x+y+2z-5=0$. Укажите верный ответ:

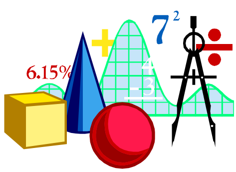
☞ $x+y-z=0;$ ☞ $2x-y-3=0;$ ☞ $6x+y-z-6=0.$

🕮 См. III (е).

12.5. Найдите уравнения проекции прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$ на плоскость. Укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases}2x-y-3=0,\\ x+y+2z-5=0;\end{cases}$ ☞ $\begin{cases}x+y-z=0,\\ x+y+2z-5=0;\end{cases}$ ☞ $\begin{cases}6x+y-z-6=0,\\ x+y+2z-5=0.\end{cases}$

🕮 См. VI (г).



Задача 13

Найдите угол между прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$ и плоскостью $3x-3y+2z-5=0$.

13.1. Найдите угол между прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$ и плоскостью $3x-3y+2z-5=0$. Укажите верный ответ:

☞ $\sin\varphi=24/\sqrt{22};$ ☞ $\sin\varphi=0;$ ☞ $\cos\varphi=0.$

🕮 См. VII.

ОТВЕТЫ

1.1. В данном случае выбран алгоритм А.
1.2. Плоскости пересекаются.

1.3. Точка $M_1\left(\frac{4z_1-18}{5}, \frac{3z_1-6}{5}, z_1\right)$.

1.4. Вектор $\overline{S}(4, 3, 5)$.

1.5. Каноническое уравнение прямой a имеет вид

$$\frac{x-x_1}{4}=\frac{y-y_1}{3}=\frac{z-z_1}{5}.$$

2.1. В данном случае выбран алгоритм А.

2.2. $\overline{S}(2, 4, -4)$.

2.3. $(x-1)/2=(y-1)/4=z/-4$.

3.1. В данном случае выбран алгоритм А.

3.2. Нормали к плоскостям $\overline{n}_\alpha=(2, 4, -4)$; $\overline{n}_\beta=(1, -3, 1)$.

3.3. $\overline{n}_\gamma=(4, 3, 5)$.

3.4. $4x+3y+5z-7=0$.

4.1. В данном случае выбран алгоритм Б.

4.2. $(2+\lambda)x+(4-3\lambda)y+(-4+\lambda)z+12=0$.

4.3. При $\lambda = 9$ точка A лежит в плоскости, принадлежащей пучку.

4.4. $11x-23y+5z+12=0$.

5.1. В данном случае выбран алгоритм Б.

5.2. Точка A не принадлежит плоскости $2x+4y-4z+12=0$.

5.3. $d = 3$.

6.1. В данном случае выбран алгоритм А.

6.2. $\overline{AB}=(1; 3; -5)$; $\overline{n}_\alpha=(1; 1; 2)$.

6.3. $\overline{n}_\beta=(11;-7;-2)$.

6.4. $11x-7y-2z-21=0$.

7.1. В данном случае выбран алгоритм Б.

7.2. $\bar{n}_{\alpha}(1;1;-2)$.

7.3. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$.

7.4. $C(2;2;-1)$.

8.1. В данном случае выбран алгоритм Б.

8.2. $\bar{n}_{\alpha}=(4;-5;3);$
$\bar{n}_{\beta}=(1;-4;-1).$

8.3. $\cos\varphi=7/10$.

9.1. В данном случае выбран алгоритм А.

9.2. $\overline{AB}=(3;-5;-2)$.

9.3. $\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{-2}$.

10.1. $\cos\varphi=-6/\sqrt{510}$.

11.1. В данном случае выбран алгоритм Б.

11.2. $\bar{l}=(2;3;-1)$.

11.3. $2x+3y-z-4=0$.

11.4. $C\left(\frac{8}{7};\frac{3}{14};-\frac{15}{14}\right)$.

12.1. В данном случае выбран алгоритм А.

12.2. $\begin{cases}2x-y-3=0;\\3x-z-3=0.\end{cases}$

12.3. $(2+3\lambda)x-y-\lambda z-3(1+\lambda)=0,\ \lambda=-1.$

12.4. $x+y-z=0.$

12.5. $\begin{cases}x+y-z=0,\\x+y+2z-5=0.\end{cases}$

13.1. $\sin\varphi=0.$

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Необходимые сведения

I. Линейные операции над векторами

I.1. Если вектор $\bar{a}$ имеет декартовы прямоугольные координаты *x, y, z*, то справедлива запись:

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \{x, y, z\}.$$

Если вектор $\overline{AB}$ задан своими начальными $A(x_1, y_1, z_1)$ и конечными $B(x_2, y_2, z_2)$ точками, то координаты этого вектора $\overline{AB} = \{x, y, z\}$ равны разностям одноименных координат конца и начала вектора:

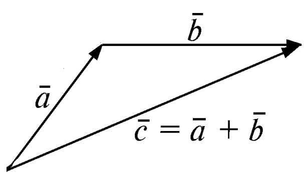
$$x = x_2 - x_1; \quad y = y_2 - y_1; \quad z = z_2 - z_1.$$

Нулевой вектор — это вектор, у которого начало и конец совпадают (имеет произвольное направление).

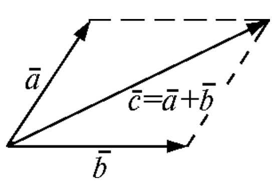
I.2. Сумма и разность векторов

Сумма:

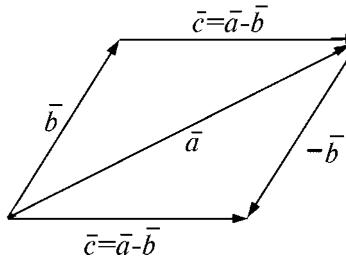
1) правило треугольника



2) правило параллелограмма



Разность:



Если $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$, то

$$\bar{a}\pm\bar{b}=\{x_1\pm x_2;\, y_1\pm y_2;\, z_1\pm z_2\}.$$

Если $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\lambda=\text{const}$, то $\lambda\bar{a}=\{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$.

I.3. Длина вектора

Если $\bar{a}=\{x, y, z\}$, то длина вектора в ортонормированном базисе вычисляется по формуле $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Так как

$$\cos\alpha=\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{i}\right)=\frac{x}{|\bar{a}|};\qquad \cos\beta=\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{j}\right)=\frac{y}{|\bar{a}|};$$

$$\cos\gamma=\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{k}\right)=\frac{z}{|\bar{a}|},$$

то $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Отметим, что направляющие косинусы вектора являются координатами его орта (единичного вектора):

$$\bar{a}^0=\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

I.4. Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними: $\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)=|\bar{a}|\cdot\left|\bar{b}\right|\cos\left(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b}\right)$.

Свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ — коммутативность;

2) $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda(\bar{a}\bar{b})=\bar{a}(\lambda\bar{b})$ — ассоциативность;

3) $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\,\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$ — дистрибутивность;

4) $\bar{a}\cdot\bar{b}=0\Leftrightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$, или $\bar{a}=0$, или $\bar{b}=0$;

5) $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2\Rightarrow|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}$.

Если $\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ и $\bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, то

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

I.4, а. Если $\bar{a}=\alpha\bar{m}+\beta\bar{n}$, где известны $|\bar{m}|,|\bar{n}|,\widehat{\bar{m}\cdot\bar{n}}$ — угол между векторами $|\bar{m}|,|\bar{n}|$ и α,β — const, то

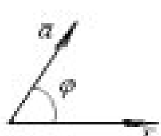
$$|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}=\sqrt{(\alpha\bar{m}+\beta\bar{n})(\alpha\bar{m}+\beta\bar{n})}=$$
$$=\sqrt{\alpha^2(\bar{m}\cdot\bar{m})+2\alpha\beta(\bar{m}\cdot\bar{n})+\beta^2(\bar{n}\cdot\bar{n})}=$$
$$=\sqrt{\alpha^2|\bar{m}|^2+2\alpha\beta|\bar{m}||\bar{n}|\cdot\cos\left(\widehat{\bar{m}\bar{n}}\right)+\beta^2|\bar{n}|^2}.$$

I.4, б. Если $\bar{a}=\alpha\bar{m}+\beta\bar{n}$, $\bar{b}=l\bar{m}+d\bar{n}$, где известны $|\bar{m}|,|\bar{n}|$, $\widehat{\bar{m}\cdot\bar{n}}$ — угол между векторами $\bar{m},\bar{n}$; α,β,l,d — const, то

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\alpha\bar{m}+\beta\bar{n})(l\bar{m}+d\bar{n})=\alpha l|\bar{m}|^2+$$
$$+(\alpha d+\beta l)|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cos\left(\widehat{\bar{m}\bar{n}}\right)+\beta d|\bar{n}|^2.$$

I.4, в

Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вычисляется по формуле



$$\cos\varphi=\frac{(\bar{a}\cdot\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

I.4, г. Если $\bar a=\{x_1,y_1,z_1\}$ и $\bar b=\{x_2,y_2,z_2\}$, то

$$\cos\varphi=\frac{(\bar a\cdot\bar b)}{|\bar a||\bar b|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

I.5. Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением вектора $\bar a$ на вектор $\bar b$ называется вектор $\bar c$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\bar c|=|\bar a|\cdot|\bar b|\sin\left(\bar a\,\hat{,}\,\bar b\right)$;

2) $\bar c\perp\bar a$, $\bar c\perp\bar b$;

3) вектор $\bar c$ направлен таким образом, что из его конца виден кратчайший поворот от $\bar a$ к $\bar b$ против часовой стрелки.

Векторное произведение обозначается $\bar a\times\bar b$ или $[\bar a\cdot\bar b]$.
Свойства векторного произведения:

1) $\bar a\times\bar b=-\bar b\times\bar a$ — антикоммутативно;

2) $\bar a\times\bar b=0$, если $\bar a=0$ или $\bar b=0$, или $\bar a\parallel\bar b$;

3) $(\lambda\bar a)\times\bar b=\bar a\times(\lambda\bar b)=\lambda(\bar a\times\bar b)$, т.е. векторное произведение ассоциативно относительно скалярного множителя;

4) $\bar a\times(\bar b+\bar c)=\bar a\times\bar b+\bar a\times\bar c$, т.е. векторное произведение дистрибутивно относительно сложения.

Если $\bar a=\{x_1,y_1,z_1\}$; $\bar b=\{x_2,y_2,z_2\}$, то

$$\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=$$

$$=\bar i\,(y_1z_2-y_2z_1)-\bar j\,(x_1z_2-x_2z_1)+\bar k\,(x_1y_2-x_2y_1).$$

I.5, а. Площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$, вычисляется по формуле

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left\|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(y_1z_2-y_2z_1\right)\bar{i}+\left(x_2z_1-x_1z_2\right)\bar{j}+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\bar{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(y_1z_2-y_2z_1\right)^2+\left(x_2z_1-x_1z_2\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2}\,.$$

I.5, б. Если $\bar{a}=\alpha\bar{m}+\beta\bar{n}$, $\bar{b}=l\bar{m}+d\bar{n}$, где α, β, l, d — const, то

$$[\bar{a},\bar{b}]=[\alpha\bar{m}+\beta\bar{n},\ l\bar{m}+d\bar{n}]=\alpha l\left[\bar{m},\bar{m}\right]+$$

$$+\beta l\left[\bar{n},\bar{m}\right]+\alpha d\left[\bar{m},\bar{n}\right]+\beta d\left[\bar{n},\bar{n}\right]=\left(\beta l-\alpha d\right)\left[\bar{n},\bar{m}\right],$$

так как $\left[\bar{m},\bar{n}\right]=-\left[\bar{n},\bar{m}\right]$; $\left[\bar{m},\bar{m}\right]=0$; $\left[\bar{n},\bar{n}\right]=0.$

Площадь параллелограмма:

$$S_{\text{пар.}}=\left\|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right\|=\left|\left(\beta l-\alpha d\right)\right|\left[\bar{n},\bar{m}\right]\|=$$

$$=\left|\left(\beta l-\alpha d\right)\left|\bar{n}\right|\left|\bar{m}\right|\sin\left(\widehat{\bar{n},\bar{m}}\right)\right|.$$

I.5, в. Если $\bar{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ и $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$, то

$$\bar{c}=\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(y_1z_2-y_2z_1\right)\bar{i}+\left(x_2z_1-z_2x_1\right)\bar{j}+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\bar{k}$$

или

$$\bar{c}=X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k},$$

где

$$X=y_1z_2-y_2z_1;\ Y=x_2z_1-z_2x_1;\ Z=x_1y_2-x_2y_1.$$

I.6. Смешанное произведение трех векторов

Определение. Смешанным произведением векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называется скалярное произведение векторов $\bar{a}\times\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$, т.е. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}.$

Свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хоть один из перемножаемых векторов равен нулю;

б) два из перемножаемых векторов коллинеарны (лежат на параллельных прямых);

в) три ненулевых вектора параллельны одной и той же плоскости (компланарность).

2. Смешанное произведение не изменяется, если в нем поменять местами знаки векторного $(\times)$ и скалярного $(\cdot)$ умножения, т.е. $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$. В силу этого свойства смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ условимся записывать в виде $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

3. Смешанное произведение не изменяется, если переставлять перемножаемые векторы в круговом порядке: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{b}\bar{c}\bar{a}=\bar{c}\bar{a}\bar{b}$.

4. При перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменяет только знак:

$$\bar{b}\bar{a}\bar{c}=-\bar{a}\bar{b}\bar{c};\ \bar{c}\bar{b}\bar{a}=-\bar{a}\bar{b}\bar{c};\ \bar{a}\bar{c}\bar{b}=-\bar{a}\bar{b}\bar{c}.$$

Пусть

$$\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\};\ \bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\};\ \bar{c}=\{x_3,y_3,z_3\}.$$

Тогда

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Из свойств смешанного произведения трех векторов вытекает следующее:

а) необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов служит условие $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$ или

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0;$$

б) объем V_1 параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, и объем V_2, образованной ими треугольной пирамиды, находятся по формулам $V_1 = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$ или

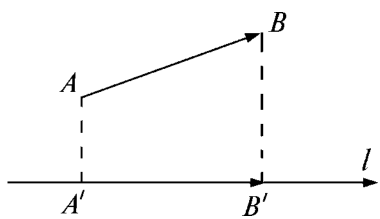
$$V_1 = \text{абс.вел.}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad V_2 = \frac{1}{6}V_1 = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$$

или

$$V_2 = \frac{1}{6}\text{абс.вел.}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

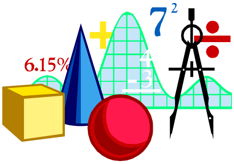
I.7. Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется величина направленного отрезка $A'B'$, заключенного между проекциями начала и конца вектора $\overline{AB}$, причем длина берется с положительным знаком, когда вектор $\overline{A'B'}$ имеет направление орта оси l, и с отрицательным знаком, когда $\overline{A'B'}$ и орт имеют противоположные направления:



$$\text{пр}_{\bar{l}}\,\overline{AB} = |\overline{AB}|\cos\left(\overline{AB}\,\hat{,}\,l\right) = \frac{\left(\overline{AB}, l\right)}{|l|};$$

$$\overline{A'B'} = \frac{l}{|l|}\cdot \text{пр}_{\bar{l}}\,\overline{AB} = l\,\frac{\left(\overline{AB}\cdot l\right)}{|l|^2}.$$



Задача 1

Параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ построен на векторах $\overline{AB}(6,2,2)$; $\overline{AD}(1,1,-1)$; $\overline{AA'}(-2,3,1)$. Вычислите угол φ между ребром $\overline{A'D'}$ и диагональю $\overline{DB'}$.

1.1. Укажите алгоритм решения задачи:

А. Вычислите:

- координаты векторов $\overline{A'D'}$, $\overline{DB'}$;
- длины векторов $\overline{A'D'}$, $\overline{DB'}$;
- скалярное произведение векторов $\left(\overline{A'D'}\cdot\overline{DB'}\right)$;
- $\cos\varphi$.

Б. Вычислите:

- координаты векторов $\overline{AD}$ и $\overline{B'D}$;
- длины векторов $\left|\overline{AD}\right|$ и $\left|\overline{B'D}\right|$;
- скалярное произведение $\left(\overline{AD}\cdot\overline{B'D}\right)$;
- $\sin\varphi$.

1.2. Вычислите координаты векторов $\overline{A'D'}$, $\overline{DB'}$. Укажите верный ответ:

☞ $\left.\begin{array}{l}\overline{A'D'}=(1,1,-1)\\ \overline{DB'}=(3,4,4)\end{array}\right\}$; ☞ $\left.\begin{array}{l}\overline{A'D'}=(0,1,-1)\\ \overline{DB'}=(3,-4,4)\end{array}\right\}$; ☞ $\left.\begin{array}{l}\overline{A'D'}=(1,1,-1)\\ \overline{DB'}=(-3,4,4)\end{array}\right\}$.

🕮 См. I. 2.

1.3. Вычислите $\left|\overline{A'D'}\right|$ и $\left|\overline{DB'}\right|$. Укажите верный ответ:

☞ $\left.\begin{array}{l}\left|\overline{A'D'}\right|=1\\ \left|\overline{DB'}\right|=11\end{array}\right\}$; ☞ $\left.\begin{array}{l}\left|\overline{A'D'}\right|=\sqrt{3}\\ \left|\overline{DB'}\right|=\sqrt{41}\end{array}\right\}$; ☞ $\left.\begin{array}{l}\left|\overline{A'D'}\right|=1\\ \left|\overline{DB'}\right|=\sqrt{11}\end{array}\right\}$.

🕮 См. I.3.

1.4. Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{A'D'}=(1,1,-1)$ и $\overline{DB'}=(3,4,4)$. Укажите верный ответ:

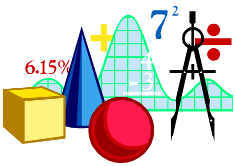
☞ $\left(\overline{A'D'}\cdot\overline{DB'}\right)=11$; ☞ $\left(\overline{A'D'}\cdot\overline{DB'}\right)=3$; ☞ $\left(\overline{A'D'}\cdot\overline{DB'}\right)=7$.

🕮 См. I.4.

1.5. Вычислите косинус угла между $\overline{A'D'}$ и $\overline{DB'}$. Укажите верный ответ:

☞ $\cos\varphi=3/\sqrt{123}$; ☞ $\cos\varphi=-5/\sqrt{123}$; ☞ $\cos\varphi=3/121$.

🕮 См. I.4, в.



Задача 2

Параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ построен на векторах $\overline{AB}(6,2,2)$; $\overline{AD}(1,1,-1)$; $\overline{AA'}(-2,3,1)$. Вычислите площадь S сечения $EB'C$, где E — середина ребра $D'C'$.

2.1. Укажите алгоритм решения задачи:

А. Найдите:

- координаты векторов $\overline{CB'}$ и $\overline{CE}$;
- векторное произведение $\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]$;
- длину вектора $\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]$ и площадь треугольника $EB'C$.

Б. Найдите:

- координаты векторов $\overline{B'E}$ и $\overline{B'C}$;
- векторное произведение $\left[\overline{B'E}\cdot\overline{B'C}\right]$;
- длину вектора $\left[\overline{B'E}\cdot\overline{B'C}\right]$ и площадь сечения $EB'C$.

2.2. Найдите координаты векторов $\overline{CB'}$ и $\overline{CE}$. Укажите верный ответ:

☞ $\left.\begin{matrix}\overline{CB'}=(3,2,2)\\ \overline{CE}=(-5,2,0)\end{matrix}\right\};$ ☞ $\left.\begin{matrix}\overline{CB'}=(-3,2,2)\\ \overline{CE}=(5,2,0)\end{matrix}\right\};$ ☞ $\left.\begin{matrix}\overline{CB'}=(-3,2,2)\\ \overline{CE}=(-5,2,0)\end{matrix}\right\}.$

🕮 См. I.2.

2.3. Вычислите векторное произведение $\overline{CB'}=(-3,2,2)$ и $\overline{CE}=(-5,2,0)$. Укажите верный ответ:

☞ $\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]=-10;$ ☞ $\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]=(-4,-10,4);$

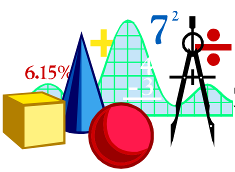
☞ $\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]=(-4,10,4).$

🕮 См. I.5.

2.4. Вычислите площадь S сечения $EB'C$. Укажите верный ответ:

☞ $S=2\sqrt{33};$ ☞ $S=\sqrt{33};$ ☞ $S=19/2.$

🕮 См. I.5, а.



Задача 3

Параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ построен на векторах $\overline{AB}(6,2,2)$; $\overline{AD}(1,1,-1)$; $\overline{AA'}(-2,3,1)$. Вычислите объем тетраэдра $EB'C'C$, где E — середина ребра $D'C'$.

3.1. Укажите алгоритм решения задачи:
А. Найдите:

- координаты векторов $\overline{CB'}$, $\overline{CE}$, $\overline{CC'}$;
- смешанное произведение $\overline{CB'}\times\overline{CE}\cdot\overline{CC'}$;

• объем тетраэдра $EB'C'C$.

Б. Найдите:

• координаты векторов $\overline{EB'}$, $\overline{EC'}$, $\overline{EC}$;

• векторное произведение $\left[\overline{EB'}\cdot\overline{EC}\right]$;

• длину вектора $\left[\overline{EB'}\cdot\overline{EC}\right]$ и площадь основания тетраэдра $\left(S_{EB'CC'}\right)$;

• высоту тетраэдра;

• объем тетраэдра.

3.2. Найдите векторы $\overline{CB'}$, $\overline{CE}$, $\overline{CC'}$. Укажите верный ответ:

☞ $\left.\begin{array}{l}\overline{CB'}=(3,2,2)\\ \overline{CE}=(-5,2,0)\\ \overline{CC'}=(-2,3,1)\end{array}\right\}$; ☞ $\left.\begin{array}{l}\overline{CB'}=(-3,2,2)\\ \overline{CE}=(5,2,0)\\ \overline{CC'}=(2,3,1)\end{array}\right\}$; ☞ $\left.\begin{array}{l}\overline{CB'}=(-3,2,2)\\ \overline{CE}=(-5,2,0)\\ \overline{CC'}=(-2,3,1)\end{array}\right\}$.

🕮 См. I.2

3.3. Вычислите смешанное произведение векторов $\overline{CB'}=(-3,2,2)$; $\overline{CE}=(-5,2,0)$; $\overline{CC'}=(-2,3,1)$. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{CB'}\times\overline{CE}\cdot\overline{CC'}=22$;

☞ $\overline{CB'}\times\overline{CE}\cdot\overline{CC'}=-18$;

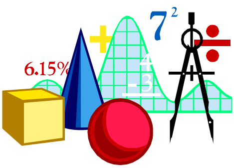
☞ $\overline{CB'}\times\overline{CE}\cdot\overline{CC'}=18$.

🕮 См. I.6.

3.4. Вычислите $V_{EB'C'C}$. Укажите верный ответ:

☞ $V=1/2$; ☞ $V=6$; ☞ $V=3$.

🕮 См. I.6.



Задача 4

Параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ построен на векторах $\overline{AB}(6,2,2)$; $\overline{AD}(1,1,-1)$; $\overline{AA'}(-2,3,1)$. Найдите координаты единичного вектора $\bar{n}_0$, перпендикулярного к плоскости $B'CE$, где E — середина ребра $D'C'$.

4.1. Укажите алгоритм решения задачи:

А. Найдите:

- координаты векторов $\overline{CB'}$, $\overline{CE}$;
- векторное произведение $\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]$;
- длину вектора $\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]$;
- координаты единичного вектора $\bar{n}_0$.

Б. Найдите:

- координаты векторов $\overline{B'C}$, $\overline{B'E}$;
- векторное произведение $\left[\overline{B'C}\cdot\overline{B'E}\right]$ и длину вектора $\left[\overline{B'C}\cdot\overline{B'E}\right]$;
- координаты единичного вектора $\bar{n}_0$.

4.2. Параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ построен на векторах $\overline{AB}(6,2,2)$; $\overline{AD}(1,1,-1)$; $\overline{AA'}(-2,3,1)$. Найдите $\overline{CB'}$ и $\overline{CE}$. Укажите верный ответ:

☞ $\left.\begin{array}{l}\overline{CB'}=(3,2,2)\\ \overline{CE}=(-5,2,0)\end{array}\right\}$;

☞ $\left.\begin{array}{l}\overline{CB'}=(-3,2,2)\\ \overline{CE}=(-5,2,0)\end{array}\right\}$;

☞ $\left.\begin{array}{l}\overline{CB'}=(0,2,2)\\ \overline{CE}=(5,2,0)\end{array}\right\}$.

🕮 См. I.2.

4.3. Вычислите $\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]$. Укажите верный ответ:

☞ $\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]=(-4,10,-4)$; ☞ $\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]=8$;

☞ $\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]=(-4,-10,4)$.

🕮 См. I.5.

4.4. Вычислите $\left\|\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]\right\|$. Укажите верный ответ:

☞ $\left\|\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]\right\|=2\sqrt{33}$; ☞ $\left\|\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]\right\|=2$; ☞ $\left\|\left[\overline{CB'}\cdot\overline{CE}\right]\right\|=8$.

🕮 См. I.3.

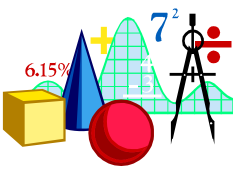
4.5. Найдите координаты единичного вектора $\bar{n}_0$. Укажите верный ответ:

☞ $\bar{n}_0=\left(\pm\frac{2}{\sqrt{33}},\ \mp\frac{5}{\sqrt{33}},\ \pm\frac{2}{\sqrt{33}}\right)$;

☞ $\bar{n}_0=\left(\mp\frac{2}{\sqrt{33}},\ \mp\frac{5}{\sqrt{33}},\ \pm\frac{2}{\sqrt{33}}\right)$;

☞ $\bar{n}_0=\frac{1}{\sqrt{33}}(2,5,-2)$.

🕮 См. I.5, в.



Задача 5

Параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ построен на векторах $\overline{AB}(6,2,2)$; $\overline{AD}(1,1,-1)$; $\overline{AA'}(-2,3,1)$. Найдите координаты вектора $\overline{AF}$, где F — основание перпендикуляра, опущенного из точки A' на ребро AB.

5.1. Укажите алгоритм решения задачи:

А. Найдите:

• длину вектора $\overline{AB}$;

- координаты вектора $\overline{AB_0}$;
- скалярное произведение $\left(\overline{AA'}\cdot\overline{AB}\right)$;
- проекцию вектора AA' на вектор $\overline{AB}$;
- координаты вектора $\overline{AF}$.

Б. Найдите:

- длину вектора $\overline{AA'}$;
- косинус угла между векторами $\overline{AA'}$ и $\overline{AB}$;
- проекцию вектора $\overline{AA'}$ на $\overline{AB}$;
- длину вектора $\overline{AB}$ и координаты единичного вектора $\overline{AB_0}$;
- координаты вектора $\overline{AF}$.

5.2. Вычислите длину вектора $\overline{AB}=(6,\ 2,\ 2)$. Укажите верный ответ:

☞ $|\overline{AB}|=10$; ☞ $|\overline{AB}|=\sqrt{10}$; ☞ $|\overline{AB}|=2\sqrt{11}$.

📖 См. I.3.

5.3. Найдите координаты вектора $\overline{AB_0}$, если $\overline{AB}(6,2,2)$. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{AB_0}=\dfrac{1}{10}(6,2,2)$; ☞ $\overline{AB_0}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}(6,2,2)$;

☞ $\overline{AB_0}=\dfrac{1}{\sqrt{11}}(3,1,1)$.

📖 См. I.3.

5.4. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AA'}(-2,3,1)$; $\overline{AB}(6,2,2)$. Укажите верный ответ:

☞ $\left(\overline{AA'}\cdot\overline{AB}\right)=-4$; ☞ $\left(\overline{AA'}\cdot\overline{AB}\right)=8$; ☞ $\left(\overline{AA'}\cdot\overline{AB}\right)=20$.

📖 См. I.4.

5.5. Вычислите проекцию вектора $\overline{AA'}(-2,3,1)$ на $\overline{AB}(6,2,2)$. Укажите верный ответ:

☞ $\text{пр}_{\overline{AB}}\,\overline{AA'}=-2/\sqrt{11}$;

☞ пр $_{\overline{AB}}\overline{AA'} = -2/\sqrt{10}$; ☞ пр $_{\overline{AB}}\overline{AA'} = -2$.

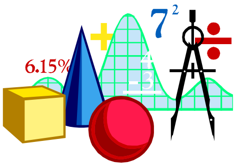
🕮 См. I.7.

5.6. Найдите координаты вектора $\overline{AF}$, где F — основание перпендикуляра, опущенного из точки A' на ребро AB. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{AF} = (-6/11, -2/11, -2/11)$;

☞ $\overline{AF} = (-6, -2, -2)$; ☞ $\overline{AF} = (3, 1, 1)$.

🕮 См. I.7.



Задача 6

Вычислите угол между векторами $\bar{c} = 3\bar{a} - 2\bar{b}$ и $\bar{d} = 5\bar{a} - 6\bar{b}$, где $|\bar{a}| = 4$; $|\bar{b}| = 6$; $\Psi = \widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = \pi/3$.

6.1. Укажите алгоритм решения задачи:

А. Вычислите:

- длины векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$;
- скалярное произведение векторов $(\bar{c} \cdot \bar{d})$;
- косинус угла между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$.

Б. Вычислите:

- векторное произведение векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$, т.е. $[\bar{c} \cdot \bar{d}]$;
- длины векторов $\bar{c}$, $\bar{d}$ и $[\bar{c} \cdot \bar{d}]$;
- синус угла между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$.

6.2. Вычислите длины векторов $\bar{c} = 3\bar{a} - 2\bar{b}$ и $\bar{d} = 5\bar{a} - 6\bar{b}$, где $|\bar{a}| = 4$; $|\bar{b}| = 6$; $\Psi = \widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = \pi/3$. Укажите верный ответ:

☞ $\left.\begin{matrix} |\bar{c}| = 12 \\ |\bar{d}| = 4\sqrt{61} \end{matrix}\right\}$; ☞ $\left.\begin{matrix} |\bar{c}| = 12\sqrt{3} \\ |\bar{d}| = 2\sqrt{61} \end{matrix}\right\}$; ☞ $\left.\begin{matrix} |\bar{c}| = 10 \\ |\bar{d}| = 7\sqrt{14} \end{matrix}\right\}$.

🕮 См. I.4, а.

6.3. Вычислите скалярное произведение векторов $\bar{c} = 3\bar{a} - 2\bar{b}$ и $\bar{d} = 5\bar{a} - 6\bar{b}$, где $|\bar{a}| = 4$; $|\bar{b}| = 6$; $\Psi = \widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = \pi/3$. Укажите верный ответ:

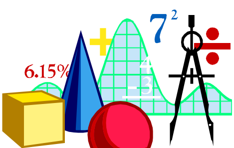
☞ $\bar{c} \cdot \bar{d} = 336$; ☞ $\bar{c} \cdot \bar{d} = 1008$; ☞ $\bar{c} \cdot \bar{d} = -672$.

🕮 См. I.4, б.

6.4. Вычислите угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{d}$. Укажите верный ответ:

☞ $\cos\varphi = -7/\sqrt{61}$; ☞ $\cos\varphi = 7/\sqrt{61}$; ☞ $\cos\varphi = 4/\sqrt{61}$.

🕮 См. I.4, в.



Задача 7

Найдите площадь треугольника, зная его вершины $A(2, 2, 2)$; $B(4, 0, 3)$; $C(0, 1, 0)$.

7.1. Укажите алгоритм решения:

А. Найдите:

- координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;
- векторное произведение $\left[\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right]$;
- длину вектора $\left[\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right]$ и площадь треугольника ABC.

Б. Найдите:

- координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ и их длины;
- проекцию вектора $\overline{AB}$ на $\overline{AC}$ и высоту треугольника;
- площадь треугольника ABC.

7.2. Зная $A(2, 2, 2)$; $B(4, 0, 3)$; $C(0, 1, 0)$, найдите координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Укажите верный ответ:

☞ $\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=(2,-2,1)\\ \overline{AC}=(-2,-1,-2)\end{array}\right\};$ ☞ $\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=(-2,2,-1)\\ \overline{AC}=(2,1,2)\end{array}\right\};$

☞ $\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=(6,2,5)\\ \overline{AC}=(2,3,2)\end{array}\right\}.$

📖 См. I.1.

7.3. Найдите $\left[\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right]$, где $\overline{AB}=(2,-2,1)$; $\overline{AC}=(-2,-1,-2)$. Укажите верный ответ:

☞ $\left[\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right]=(5,-2,-6)$; ☞ $\left[\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right]=1$;

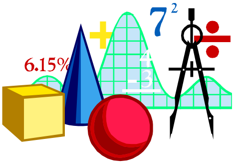
☞ $\left[\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right]=(5,2,-6)$.

📖 См. I.5.

7.4. Вычислите $S_{\Delta ABC}$. Укажите верный ответ:

☞ $S_{\Delta}=\sqrt{65}$; ☞ $S_{\Delta}=\sqrt{57}/2$; ☞ $S_{\Delta}=\sqrt{65}/2$.

📖 См. I.5, а.



Задача 8

Вычислите объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0,0,1)$; $B(2,3,5)$; $C(6,2,3)$ и $D(3,7,2)$.

8.1. Укажите алгоритм решения:

А. Найдите:

• координаты векторов, на которых построена пирамида, т.е. $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$;

• смешанное произведение $\overline{AB}\times\overline{AD}\cdot\overline{AC}$;

• объем тетраэдра.

Б. Найдите:

• площадь основания пирамиды, т.е. площадь треугольника ABC;

• длину высоты пирамиды;

• объем пирамиды.

8.2. Зная координаты вершин $A(0,0,1)$; $B(2,3,5)$; $C(6,2,3)$ и $D(3,7,2)$, найдите координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{AB}=(2,3,4)$, $\overline{AD}=(3,7,1)$, $\overline{AC}=(6,2,2)$;

☞ $\overline{AB}=(-2,-3,-4)$, $\overline{AD}=(-3,-7,-1)$, $\overline{AC}=(-6,-2,-2)$;

☞ $\overline{AB}=(2,3,6)$, $\overline{AD}=(3,7,3)$, $\overline{AC}=(6,2,4)$.

🕮 См. I.1.

8.3. Вычислите смешанное произведение векторов $\overline{AB}=(2,3,4)$, $\overline{AD}=(3,7,1)$ и $\overline{AC}=(6,2,2)$. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AC}=-120$;

☞ $\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AC}=168$;

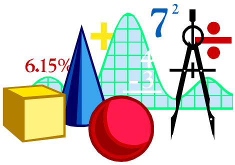
☞ $\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AC}=120$.

🕮 См. I.6.

8.4. Вычислите объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0,0,1)$; $B(2,3,5)$; $C(6,2,3)$ и $D(3,7,2)$. Укажите верный ответ:

☞ $V = 20$; ☞ $V = 28$; ☞ $V = 40$.

🕮 См. I.6.



Задача 9

Покажите, что точки $A(5,7-2)$; $B(3,1,-1)$; $C(9,4,-4)$ и $D(1,5,0)$ лежат в одной плоскости.

9.1. Укажите алгоритм решения:

А. Найдите:

- координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$;
- смешанное произведение $\overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{AD}$ и сравните его с нулем.

Б. Найдите:

- координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$;
- векторное произведение $\left[\overline{AB}\cdot\overline{AD}\right]$.

Проверьте условие перпендикулярности вектора $\overline{AC}$ вектору, который равен произведению $\left[\overline{AB}\cdot\overline{AD}\right]$.

9.2. Зная точки $A(5,7-2)$; $B(3,1,-1)$; $C(9,4,-4)$ и $D(1,5,0)$, найдите координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{AB}=(-2,-6,1)$, $\overline{AC}=(-4,3,2)$, $\overline{AD}=(-4,-2,2)$;

☞ $\overline{AB}=(-2,-6,1)$, $\overline{AC}=(4,-3,-2)$, $\overline{AD}=(-4,-2,2)$;

☞ $\overline{AB}=(8,8,-3)$, $\overline{AC}=(4,11,-2)$, $\overline{AD}=(6,2,-2)$.

🕮 См. I.1.

9.3. Вычислите смешанное произведение векторов $\overline{AB}=(-2,-6,1)$; $\overline{AC}=(4,-3,-2)$; $\overline{AD}=(-4,-2,2)$. Укажите верный ответ:

☞ $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=-10$;

☞ $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=15$;

☞ $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=0$.

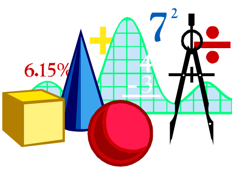
🕮 См. I.6.

9.4. Лежат или нет точки $A(5,7-2)$; $B(3,1,-1)$; $C(9,4,-4)$ и $D(1,5,0)$ в одной плоскости? Укажите верный ответ:

☞ лежат;

☞ не лежат.

🕮 См. I.6.



Задача 10

Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}=\overline{m}+2\overline{n}$ и $\overline{AD}=\overline{m}-3\overline{n}$, где $|\overline{m}|=5$, $|\overline{n}|=3$ и $\left(\overline{m}\,\hat{}\,\overline{n}\right)=\pi/6$.

10.1. Укажите алгоритм решения:
А. Вычислите:

- векторное произведение $\left[\overline{AB}\cdot\overline{AD}\right]$;
- длину вектора $\left[\overline{AB}\cdot\overline{AD}\right]$ и площадь параллелограмма.

Б. Вычислите:

- длину основания параллелограмма, т.е. длину вектора $\overline{AB}$;
- длину высоты параллелограмма;
- площадь параллелограмма.

10.2. Вычислите векторное произведение векторов $\overline{AB} = \overline{m} + 2\overline{n}$ и $\overline{AD} = \overline{m} - 3\overline{n}$. Укажите верный ответ:

☞ $\left[\overline{AB} \cdot \overline{AD}\right] = 5\left[\overline{n},\, \overline{m}\right]$;

☞ $\left[\overline{AB} \cdot \overline{AD}\right] = 5\left[\overline{m},\, \overline{m}\right] + \left[\overline{n},\, \overline{m}\right] + 6\left[\overline{n},\, \overline{n}\right]$;

☞ $\left[\overline{AB} \cdot \overline{AD}\right] = \left[\overline{m},\, \overline{n}\right]$.

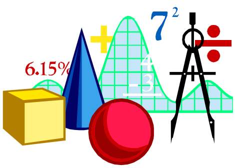
🕮 См. I.5, б.

10.3. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$. Укажите верный ответ:

☞ $S_{\text{пар.}} = 75/2$ (кв.ед.); ☞ $S_{\text{пар.}} = 75/4$ (кв.ед.);

☞ $S_{\text{пар.}} = 75$ (кв.ед.).

🕮 См. I.5, б.



Задача 11

Найдите проекцию вектора $\overline{a} = 10\overline{m} + 2\overline{n}$ на ось, имеющую направление вектора $\overline{b} = 5\overline{m} - 12\overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ — взаимно перпендикулярные орты.

11.1. Укажите алгоритм решения:

А. Вычислите:

- скалярное произведение $(\overline{a} \cdot \overline{b})$;
- длину вектора $\overline{b}$, т.е. $\left|\overline{b}\right|$;

• проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$, т.е. $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$.

Б. Вычислите:

• длину вектора $\bar{a}$, т.е. $|\bar{a}|$;

• косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

• проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$, т.е. $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$.

11.2. Вычислите скалярное произведение векторов $\bar{a} = 10\bar{m} + 2\bar{n}$ и $\bar{b} = 5\bar{m} - 12\bar{n}$, где $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$ и $\bar{m} \perp \bar{n}$. Укажите верный ответ:

☞ $(\bar{a}\bar{b}) = 74$; ☞ $(\bar{a}\bar{b}) = 26$; ☞ $(\bar{a}\bar{b}) = -26$.

🕮 См. I.4, б.

11.3. Вычислите длину вектора $\bar{b} = 5\bar{m} - 12\bar{n}$, если $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$ и $\bar{m} \perp \bar{n}$. Укажите верный ответ:

☞ $|\bar{b}| = 13$; ☞ $|\bar{b}| = \sqrt{119}$; ☞ $|\bar{b}| = \sqrt{17}$.

🕮 См. I.4, а.

11.4. Вычислите $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$, если $\bar{a} = 10\bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{b} = 5\bar{m} - 12\bar{n}$ и $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$; $\bar{m} \perp \bar{n}$. Укажите верный ответ:

☞ $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = 1/2$; ☞ $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = -2$; ☞ $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = 2$.

🕮 См. I.7.

ОТВЕТЫ

1.1. В данном случае выбран алгоритм А.

1.2. $\overline{A'D'} = (1,1,-1)$, $\overline{DB'} = (3,4,4)$.

1.3. $|\overline{A'D'}| = \sqrt{3}$, $|\overline{DB'}| = \sqrt{41}$.

1.4. $(\overline{A'D'} \cdot \overline{DB'}) = 3$.

1.5. Между $\overline{A'D'}$ и $\overline{DB'}$ $\cos\varphi = 3/\sqrt{123}$.

2.1. В данном случае выбран алгоритм А.

2.2. $\overline{CB'} = (-3,2,2)$, $\overline{CE} = (-5,2,0)$.

2.3. $[\overline{CB'} \cdot \overline{CE}] = (-4,-10,4)$.

2.4. $S = \sqrt{33}$.

3.1. В данном случае выбран алгоритм А.

3.2. $\overline{CB'} = (-3,2,2)$; $\overline{CE} = (-5,2,0)$; $\overline{CC'} = (-2,3,1)$.

3.3. $\overline{CB'} \times \overline{CE} \cdot \overline{CC'} = -18$.

3.4. $V = 3$.

4.1. В данном случае выбран алгоритм А.

4.2. $\overline{CB'} = (-3,2,2)$; $\overline{CE} = (-5,2,0)$.

4.3. $[\overline{CB'} \cdot \overline{CE}] = (-4,-10,4)$.

4.4. $|[\overline{CB'} \cdot \overline{CE}]| = 2\sqrt{33}$.

4.5. $\bar{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{33}}(\mp 2, \mp 5, \pm 2)$.

5.1. В данном случае выбран алгоритм А.

5.2. $|\overline{AB}| = 2\sqrt{11}$.

5.3. $\overline{AB_0} = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,1)$.

5.4. $(\overline{AA'} \cdot \overline{AB}) = -4$.

5.5. $\text{пр}_{\overline{AB}}\, \overline{AA'} = -2/\sqrt{11}$.

5.6. $\overline{AF} = (-6/11, -2/11, -2/11)$.

6.1. В данном случае выбран алгоритм А.

6.2. $|\bar{c}| = 12$; $|\bar{d}| = 4\sqrt{61}$.

6.3. $\bar{c} \cdot \bar{d} = 336$.

6.4. $\cos\varphi = 7/\sqrt{61}$.

7.1. В данном случае выбран алгоритм А.

7.2. $\overline{AB} = (2, -2, 1)$; $\overline{AC} = (-2, -1, -2)$.

7.3. $\left[\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right] = (5, 2, -6)$.

7.4. $S_{\Delta ABC} = \sqrt{65}/2$.

8.1. В данном случае выбран алгоритм А.

8.2. $\overline{AB} = (2, 3, 4)$, $\overline{AD} = (3, 7, 1)$, $\overline{AC} = (6, 2, 2)$.

8.3. $\overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AC} = -120$.

8.4. $V = 20$ (куб. ед.).

9.1. В данном случае выбран алгоритм А.

9.2. $\overline{AB} = (-2, -6, 1)$; $\overline{AC} = (4, -3, -2)$; $\overline{AD} = (-4, -2, 2)$.

9.3. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = 0$.

9.4. Точки лежат в одной плоскости.

10.1. В данном случае выбран алгоритм А.

10.2. $\left[\overline{AB} \cdot \overline{AD}\right] = 5[\bar{n}, \bar{m}]$.

10.3. $S_{\text{пар.}} = 75/2$ (кв.ед.).

11.1. В данном случае выбран алгоритм А.

11.2. $(\bar{a}\bar{b}) = 26$.

11.3. $|\bar{b}| = 13$.

11.4. $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = 2$.

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Необходимые сведения

По теме «Кривые второго порядка» вы должны знать:

1) определения эллипса, гиперболы, параболы;

2) канонические уравнения этих кривых;

3) геометрический смысл параметров, входящих в уравнения, и соотношения между параметрами,

и уметь:

1) по уравнению определять тип кривой;

2) выводить канонические уравнения кривых второго порядка;

3) находить координаты фокусов и другие параметры кривых, построить кривую.

Основные понятия и определения

I. Эллипс

Определение. Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами F_1 и F_2, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$). Причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

Если оси координат расположены по отношению к эллипсу так, как показано на рис. 1, а фокусы эллипса находятся на оси OX на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1(C;0)$, $F_2(-C;0)$, то получится простейшее (каноническое) уравнение эллипса: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, где a — большая, b — малая полуоси эллипса, причем a, b и c (c — половина расстояния между фокусами) связаны соотношением $a^2 = b^2 + c^2$.

Форма эллипса (мера его «сжатия») характеризуется его *эксцентриситетом:* $\varepsilon = c/a$ (так как $c < a$, то $\varepsilon < 1$).

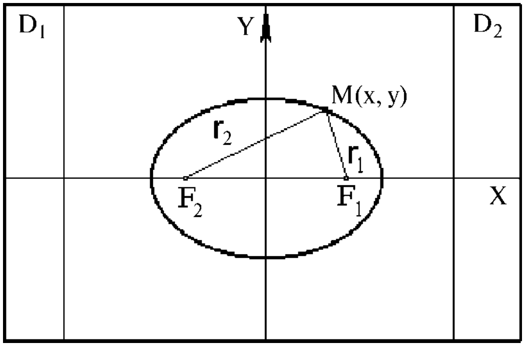


Рис. 1

Прямые $D_1: x = -a/\varepsilon$ и $D_2: x = +a/\varepsilon$, перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии a/ε от центра, называются *директрисами* эллипса.

I.1. Расположение эллипса и его параметры

$(x - x_0)^2 / a^2 + (y - y_0)^2 / b^2 = 1$; $O'(x_0, y_0)$ — центр.

1) $a > b,\ c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $F_1(x_0 + c; y_0)$, $F_2(x_0 - c;\ y_0)$;

2) $a < b,\ c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $F_1(x_0;\ y_0 + c)$, $F_2(x_0;\ y_0 - c)$.

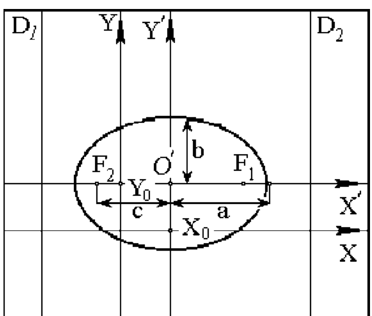


Рис. 2

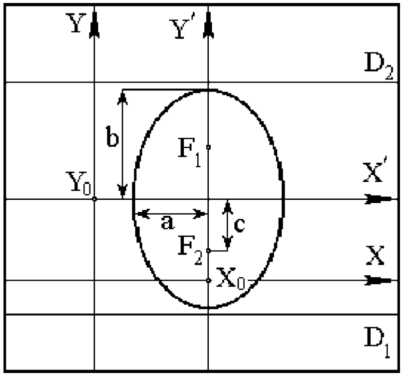


Рис. 3

I. 2. $\left(x-x_0\right)^2 / a^2+\left(y-y_0\right)^2 / b^2=1$.

1) $a>b;\ \varepsilon=c / a=\sqrt{a^2-b^2} / a$ — эксцентриситет;

2) $a<b;\ \varepsilon=c / b=\sqrt{b^2-a^2} / b$ — эксцентриситет.

I.3. Уравнения директрис

1) $a>b$ $\quad \begin{array}{l} D_2: \ x=x_0+a / \varepsilon, \\ D_1: \ x=x_0-a / \varepsilon; \end{array}$

2) $b>a$ $\quad \begin{array}{l} D_2: \ y=y_0+b / \varepsilon, \\ D_1: \ y=y_0-b / \varepsilon. \end{array}$

II. Гипербола

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами.

Если поместить фокусы гиперболы в точках $F_1(c;\,0)$ и $F_2(-c;\,0)$, то получится каноническое уравнение гиперболы $x^2 / a^2-y^2 / b^2=1$, где $b^2=c^2-a^2$.

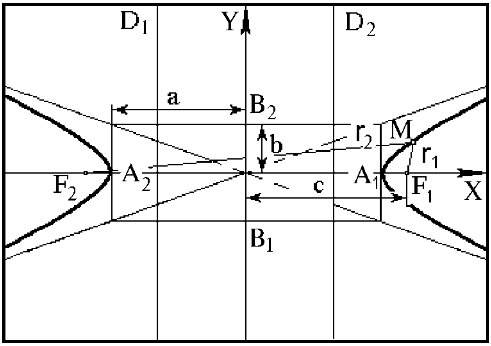


Рис. 4

Точки $A_1(a;\,0)$ и $A_2(-a;\,0)$ называются вершинами гиперболы. Отрезок A_1A_2 такой, что $|A_1A_2| = 2a$, называется действительной осью гиперболы, а отрезок B_1B_2 такой, что $|B_1B_2| = 2b$, — мнимой осью.

Гипербола имеет две *асимптоты*, уравнения которых $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Отношение $\varepsilon = c/a > 1$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Уравнение $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$ также является уравнением гиперболы, но действительной осью этой гиперболы служит отрезок оси OY длины $2b$.

Две гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ и $y^2/b^2 - x^2/a^2 = 1$ имеют одни и те же полуоси и одни и те же асимптоты, но действительная ось одной служит мнимой осью другой и наоборот. Такие две гиперболы называются *сопряженными*.

Прямые $D_1:\ x = -a/\varepsilon$ и $D_2:\ x = +a/\varepsilon$, перпендикулярные действительной оси и проходящие на расстоянии a/ε от центра, называются *директрисами* гиперболы.

II.1. Расположение гиперболы

1) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$; $0'(x_0;\,y_0)$ — центр, $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $F_1(x_0+c;\,y_0)$, $F_2(x_0-c;\,y_0)$ (рис. 5);

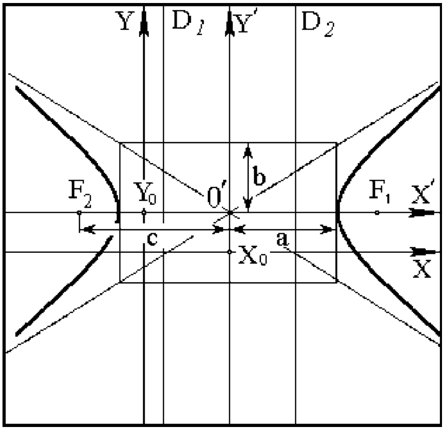


Рис. 5

2) $\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}=1;\ \ 0'(x_0;\,y_0)$ — центр, $c=\sqrt{a^2+b^2}$,
$F_1(x_0;\,y_0-c)$, $F_2(x_0;\,y_0+c)$ (рис. 6).

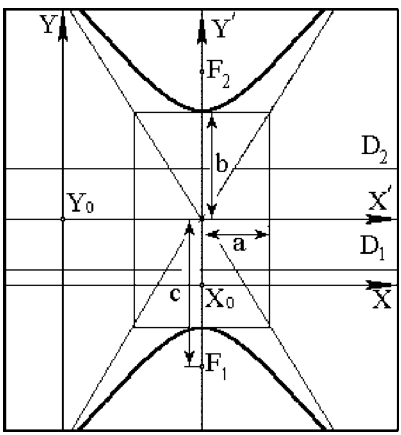


Рис. 6

II.2

1) $(x-x_0)^2/a^2-(y-y_0)^2/b^2=1$; $\varepsilon=c/a=\sqrt{a^2+b^2}/a$ — *эксцентриситет.*

2) $(y-y_0)^2/b^2-(x-x_0)^2/a^2=1$; $\varepsilon=c/b=\sqrt{a^2+b^2}/b$ — *эксцентриситет.*

II.3. Уравнение директрис гиперболы

1) $(x-x_0)^2/a^2-(y-y_0)^2/b^2=1$,

$D_2:\ x=x_0+a/\varepsilon$; $D_1:\ x=x_0-a/\varepsilon$;

2) $(y-y_0)^2/b^2-(x-x_0)^2/a^2=1$,

$D_2:\ y=y_0+b/\varepsilon$; $D_1:\ y=y_0-b/\varepsilon$.

II.4. $y-y_0=\pm b(x-x_0)/a$ — уравнение асимптот гиперболы.

III. Парабола

Определение. Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*.

Если директрисой параболы является прямая $D:\ x=-p/2$, а фокусом — точка $F(p/2;\ 0)$, то уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$, где $p>0$.

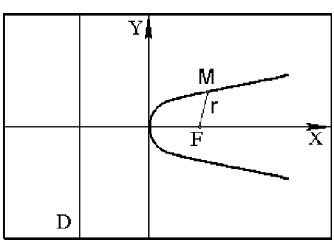


Рис. 7

III.1. Положение параболы и ее параметры

1) $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$; $\quad 0'(x_0,\, y_0)$ — вершина,

$p>0,\ F(x_0, y_0 + p/2)$ (рис. 8) или $p<0,\ F(x_0, y_0 + p/2)$ (рис. 9).

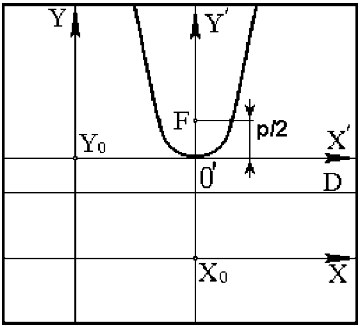


Рис. 8

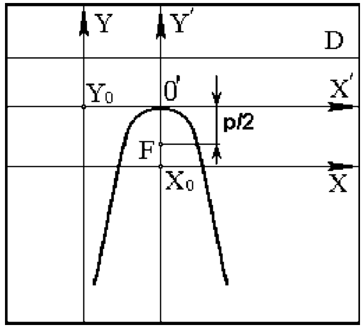


Рис. 9

2) $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$; $\quad 0'(x_0,\, y_0)$ — вершина,

$p>0,\ F(x_0 + p/2,\, y_0)$(рис.10) или $p<0,\ F(x_0 + p/2,\, y_0)$ (рис.11).

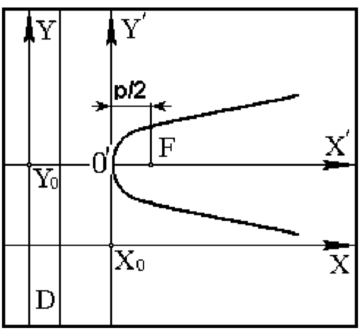


Рис. 10

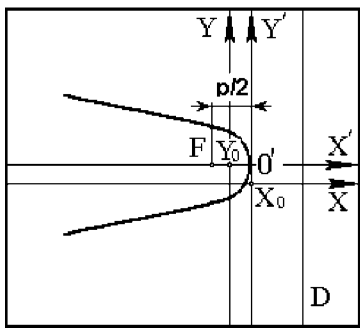


Рис. 11

III.2. Уравнение директрисы параболы

1) $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$,

$p>0\ \ D\colon\ y = y_0 - p/2$, $\quad p<0\ \ D\colon\ y = y_0 - p/2$;

2) $\left(y-y_0\right)^2=2p\left(x-x_0\right)$,

$p>0$ D: $x=x_0-p/2$, $\quad p<0$ D: $x=x_0-p/2$.

IV. Общее уравнение кривой второго порядка

IV.1. Для исследования кривых второго порядка, общее уравнение которых имеет вид $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, рассматривается произведение $A\cdot C$:

- если $A\cdot C>0$, то имеем эллипс;
- если $A\cdot C<0$, то имеем гиперболу;
- если $A\cdot C=0$, то имеем параболу.

IV.2. В процессе исследования кривых второго порядка, уравнение которых записано в общем виде, полезна «процедура выделения полного квадрата». Выделяем полный квадрат уравнения $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, в результате получим

$$A\left(x^2+2\frac{D}{A}x\right)+C\left(y^2+2\frac{E}{C}y\right)+F=0$$

или

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{C}\right)^2=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F .$$

Обозначим: $x_0=-D/A,\ y_0=-E/C$,

$$a^2=\frac{D^2/A+E^2/C-F}{A}, \qquad b^2=\frac{D^2/A+E^2/C-F}{C} .$$

IV.2 (а). Если $A\cdot C>0$, то уравнение задает кривую эллиптического типа. Причем:

а) если $D^2/A+E^2/C-F<0$, то имеем мнимый эллипс;

б) если $D^2/A+E^2/C-F=0$, то имеем точку $\left(-D/A;-E/C\right)$;

в) если $D^2/A+E^2/C-F>0$, то $\dfrac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$ и имеем канонический вид эллипса.

IV.2 (б). Если $A \cdot C < 0$, то уравнение задает кривую гиперболического типа. Причем:

а) если $D^2/A + E^2/C - F > 0$ или $D^2/A + E^2/C - F < 0$, то имеем

$(x - x_0)^2/a^2 - (y - y_0)^2/b^2 = 1$ или $(y - y_0)^2/b^2 - (x - x_0)^2/a^2 = 1$,

т.е. канонический вид гиперболы;

б) если $D^2/A + E^2/C - F = 0$, то учитывая знаки A и C, имеем $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$, т.е. пару пересекающихся прямых.

IV.2 (в). Если:

а) $C = 0$, то общее уравнение $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ задает кривую параболического типа. Выделяя полный квадрат, имеем:

$$A(x + D/A)^2 = -2E\left(y + \frac{D^2/A - F}{-2E}\right).$$

Обозначим $x_0 = -D/A,\ y_0 = -\frac{F - D^2/A}{2E},\ p = -E/A$. Тогда

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0),$$

т.е. имеем канонический вид параболы;

б) $A = 0$, то $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, т.е. кривая параболического типа.

Выделяя полный квадрат, имеем:

$$C(y + E/C)^2 = -2D\left(x + \frac{F - E^2/C}{2D}\right).$$

Обозначим $x_0 = -\frac{F - E^2/C}{2D},\ y_0 = -\frac{E}{C},\ p = -\frac{D}{C}$. Тогда

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),$$

т.е. имеем канонический вид параболы.

V. Неполные уравнения кривых

V.1. Рассмотрим уравнение вида $y = b + \sqrt{ax^2 + cx + d}$. Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} y - b \ge 0 \\ (y-b)^2 = ax^2 + cx + d \end{cases} \sim \begin{cases} y \ge b \\ (y-b)^2 - a(x + c/2a)^2 = d - c^2/4a. \end{cases}$$

V.1 (а). Если $d - c^2/(4a) > 0$ и $a > 0$, то уравнение

$$(y-b)^2 - a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 = d - \frac{c^2}{4a}$$

задает ту часть гиперболы, которая лежит в полуплоскости $y \ge b$ (рис. 12).

Строим ту часть гиперболы, которая выше прямой $y = b$.

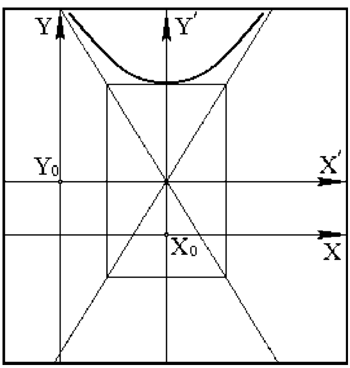


Рис. 12

V.1 (б). Если $d - c^2/(4a) > 0$, а $a < 0$, то уравнение

$$(y-b)^2 - a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 = d - \frac{c^2}{4a}$$

задает ту часть эллипса, которая лежит в полуплоскости $y \ge b$ (рис. 13).

Строим ту часть эллипса, которая лежит выше прямой $y = b$.

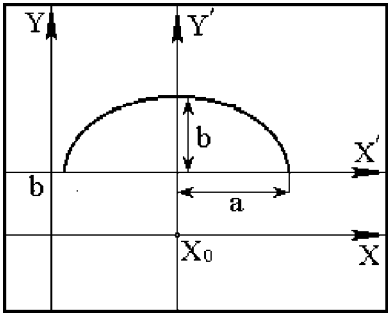


Рис. 13

V.1 (в). Если $d - c^2/(4a) < 0$ и $a > 0$, то уравнение

$$(y-b)^2 - a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 = d - \frac{c^2}{4a}$$

задает ту часть гиперболы, которая лежит в полуплоскости $y \geq b$ (рис. 14).

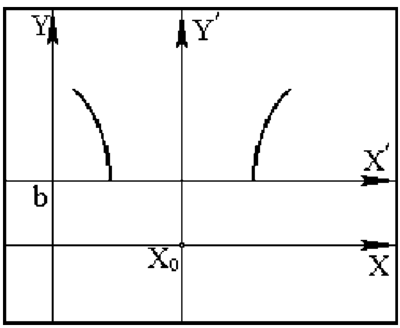


Рис. 14

V.1 (г). Если $d - c^2/(4a) < 0$ и $a < 0$, то уравнение

$$(y-b)^2 - a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 = d - \frac{c^2}{4a}$$

задает мнимый эллипс.

V.1 (д). Если $a = 0$, то уравнение $y = b + \sqrt{cx + d}$ равносильно системе $\begin{cases} y - b \geq 0 \\ (y-b)^2 = c(x + d/c) \end{cases}$, которая задает ту часть параболы, которая лежит в полуплоскости $y \geq b$ (рис. 15, 16).

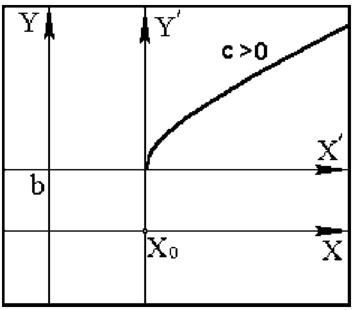


Рис. 15

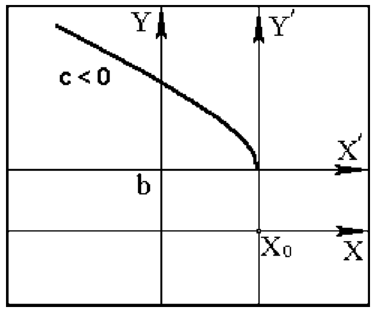


Рис. 16

V.1 (е). Если $d - c^2/(4a) = 0$ и $a > 0$, то уравнение

$$(y-b)^2 - a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 = d - \frac{c^2}{4a}$$

задает пару пересекающихся прямых $y - b = \pm\sqrt{a}\left(x + \frac{c}{2a}\right)$, которые лежат в полуплоскости $y \geq b$.

V.1 (ж). Если $d - c^2/(4a) = 0$ и $a < 0$, то уравнение

$$(y-b)^2 - a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 = d - \frac{c^2}{4a}$$

задает точку $\left(-\frac{c}{2a}; b\right)$, при условии, что она лежит в полуплоскости $y \geq b$.

V.2. Рассмотрим уравнение вида $y = b - \sqrt{ax^2 + cx + d}$. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y-b\le 0, \\ (y-b)^2 - a\left(x+\dfrac{c}{2a}\right)^2 = d-\dfrac{c^2}{4a}, \end{cases}$$

так как рассматриваются только положительные значения корня.

V.2 (а). Если $d-c^2/(4a)>0$ и $a>0$, то уравнение

$$(y-b)^2 - a\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2 = d-\frac{c^2}{4a}$$

задает ту часть гиперболы, которая лежит в полуплоскости $y\le b$ (рис. 17).

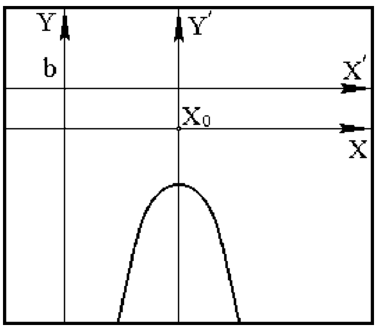


Рис. 17

V.2 (б). Если $d-c^2/(4a)>0$, а $a<0$, то уравнение

$$(y-b)^2 - a\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2 = d-\frac{c^2}{4a}$$

задает ту часть эллипса, которая лежит в полуплоскости $y\le b$ (рис. 18).

V.2 (в). Если $d-c^2/(4a)<0$, а $a>0$, то уравнение

$$(y-b)^2 - a\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2 = d-\frac{c^2}{4a}$$

задает ту часть гиперболы, которая лежит в полуплоскости $y\le b$ (рис. 19).

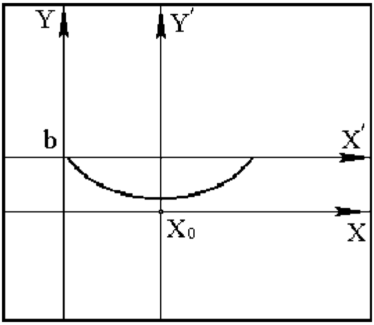


Рис. 18

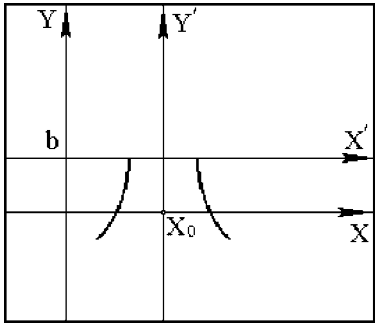


Рис. 19

V.2 (г). Если $d - c^2/(4a) < 0$ и $a < 0$, то уравнение

$$(y-b)^2 - a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 = d - \frac{c^2}{4a}$$

задает мнимый эллипс.

V.2 (д). Если $a = 0$, то уравнение $y = b - \sqrt{cx + d}$ равносильно системе $\begin{cases} y \le b \\ (y-b)^2 = c(x + d/c) \end{cases}$, которая задает ту часть параболы, которая лежит в полуплоскости $y \le b$ (рис. 20, 21).

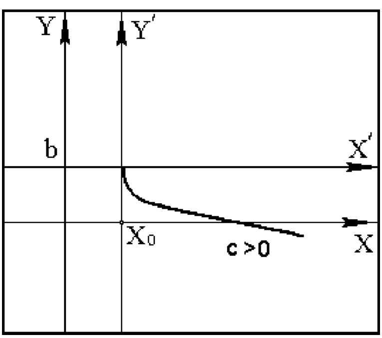


Рис. 20

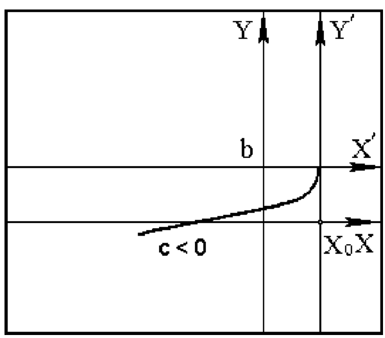


Рис. 21

V.2 (е). Если $d-c^2/(4a)=0$ и $a>0$, то уравнение

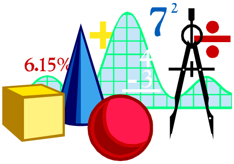
$$(y-b)^2-a\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2=d-\frac{c^2}{4a}$$

задает пару пересекающихся прямых $y-b=\pm\sqrt{a}\left(x+\frac{c}{2a}\right)$, которые лежат в полуплоскости $y\le b$.

V.2 (ж). Если $d-c^2/(4a)=0$ и $a<0$, то уравнение

$$(y-b)^2-a\left(x+\frac{c}{2a}\right)^2=d-\frac{c^2}{4a}$$

задает точку $\left(-\frac{c}{2a};b\right)$, при условии, что она лежит в полуплоскости $y\le b$.



Задача 1

Исследуйте уравнение $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$.

1.1. Определите тип кривой, заданной уравнением $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$. Укажите верный ответ:

☞ эллипс; ☞ парабола; ☞ гипербола.

🕮 Исследуйте знак произведения $A \cdot C$. См. IV.1.

1.2. Приведите уравнение кривой $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $4(x-1)^2+9(y-2)^2=4$;

☞ $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$;

☞ $4(x+1)^2+9(y-2)^2=36$;

☞ $4(x-1)^2+9(y-2)^2=1$.

🕮 Выделите полный квадрат. См. IV.2. и IV.2 (а).

1.3. Найдите координаты фокусов эллипса $(x-1)^2/9+(y-2)^2/4=1$ и укажите верный ответ:

☞ $F_1(1;5)$, $F_2(1;-1)$;

☞ $F_1\left(1;2+\sqrt{5}\right)$, $F_2\left(1;2-\sqrt{5}\right)$;

☞ $F_1\left(1+\sqrt{5};2\right)$, $F_2\left(1-\sqrt{5};2\right)$.

🕮 См. I.1.

1.4. Найдите эксцентриситет эллипса $(x-1)^2/9+(y-2)^2/4=1$ и укажите верный ответ:

☞ $\sqrt{5}/9$; ☞ $\sqrt{5}/3$; ☞ $13/9$.

📖 См. I.2.

1.5. Напишите уравнение директрис эллипса $(x-1)^2/9+(y-2)^2/4=1$ и укажите верный ответ:

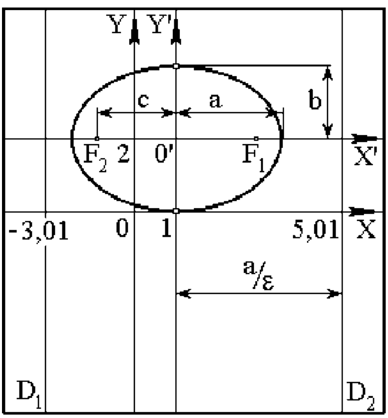
☞ $x=1+9/\sqrt{5}$; $x=1-9/\sqrt{5}$;

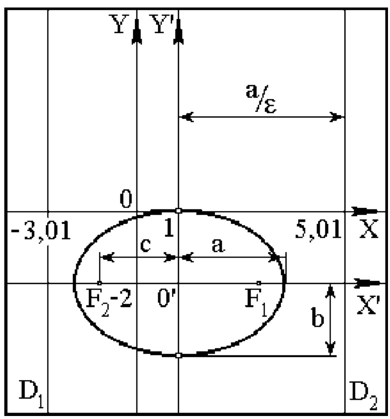
☞ $x=-1+9/\sqrt{5}$; $x=-1-9/\sqrt{5}$;

☞ $x=1+3/\sqrt{5}$; $x=1-3/\sqrt{5}$.

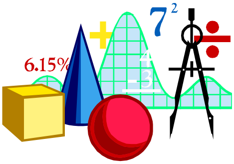
📖 См. I.3.

1.6. Постройте кривую $(x-1)^2/9+(y-2)^2/4=1$ и укажите верный ответ:





📖 См. I.1.



Задача 2

Исследуйте уравнение $x^2+y^2-2x+4y+5=0$.

2.1. Определите, какой тип кривой задан уравнением $x^2+y^2-2x+4y+5=0$. Укажите верный ответ:

☞ эллипс; ☞ парабола; ☞ гипербола.

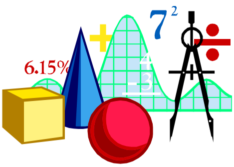
🕮 Исследуйте знак произведения $A\cdot C$. См. IV.1.

2.2. Приведите уравнение кривой $x^2+y^2-2x+4y+5=0$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $(x-1)^2+(y+2)^2=0$; ☞ $(x+1)^2+(y+2)^2=1$;

☞ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$; ☞ $2(x-1)^2+(y-2)^2=1$.

🕮 Выделите полный квадрат. См. IV.2. и IV.2 (а).



Задача 3

Исследуйте уравнение $x^2+y^2+4x+5=0$.

3.1. Определите, какой тип кривой задан уравнением $x^2+y^2+4x+5=0$. Укажите верный ответ:

☞ эллипс; ☞ гипербола; ☞ парабола.

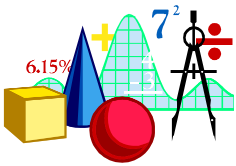
🕮 Исследуйте знак произведения $A\cdot C$. См. IV.1.

3.2. Приведите уравнение кривой $x^2+y^2+4x+5=0$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $(x+2)^2+y^2=0$; ☞ $(x+4)^2+y^2=1$;

☞ $(x+2)^2+y^2=-1$; ☞ $(x+2)^2+y^2=1$.

🕮 Выделите полный квадрат. См. IV.2; IV.2 (а).



Задача 4

Исследуйте уравнение $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$.

4.1. Определите, какой тип кривой задан уравнением $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$. Укажите верный ответ:

☞ эллипс; ☞ парабола; ☞ гипербола.

🕮 Исследуйте знак произведения $A\cdot C$. См. IV.1.

4.2. Приведите уравнение кривой $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $(x-1)^2-9(y-2)^2=9$; ☞ $(x+1)^2/9-(y-2)^2=1$;

☞ $(x+1)^2-(y-2)^2/9=1$; ☞ $(x-1)^2-(y-2)^2=9$.

🕮 Выделите полный квадрат. См. IV.2; IV.2 (б).

4.3. Найдите координаты фокусов гиперболы $(x+1)^2/9-(y-2)^2=1$ и укажите верный ответ:

☞ $(1+\sqrt{10};2)$; $(1-\sqrt{10};2)$; ☞ $(-1+\sqrt{10};2)$; $(-1-\sqrt{10};2)$;

☞ $(-1;2+\sqrt{10})$; $(-1;2-\sqrt{10})$.

🕮 См. II.1.

4.4. Найдите эксцентриситет гиперболы $(x+1)^2/9-(y-2)^2=1$ и укажите верный ответ:

☞ $\sqrt{10}$; ☞ $\sqrt{10}/3$; ☞ $\sqrt{10}/9$.

🕮 См. II.2.

4.5. Напишите уравнение директрис гиперболы $(x+1)^2/9-(y-2)^2=1$ и укажите верный ответ:

☞ $x=1+9/\sqrt{10}$, $x=1-9/\sqrt{10}$;

☞ $x=-1+9/\sqrt{10}$, $x=-1-9/\sqrt{10}$;

☞ $x=-1+\sqrt{10}$, $x=-1-\sqrt{10}$.

🕮 См. II.3.

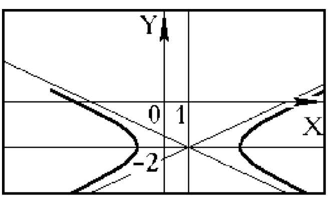
4.6. Составьте уравнения асимптот гиперболы $(x+1)^2/9-(y-2)^2=1$ и укажите верный ответ:

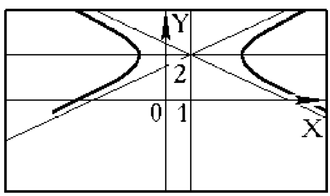
☞ $y-2=\pm(x+1)/3$; ☞ $y-2=\pm3(x+1)$;

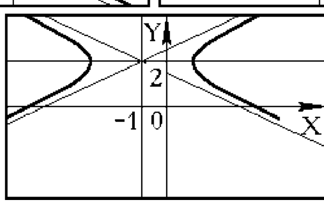
☞ $y+2=\pm3(x-1)$.

🕮 См. II.4.

4.7. Постройте кривую $(x+1)^2/9-(y-2)^2=1$ и укажите верный ответ:







🕮 См. II.1.

Задача 5

Исследуйте уравнение $16y^2-9x^2-32y+18x+7=0$.

5.1. Определите, какой тип кривой задан уравнением $16y^2-9x^2-32y+18x+7=0$. Укажите верный ответ:

☞ эллипс; ☞ парабола; ☞ гипербола.

🕮 Исследуйте знак произведения $A\cdot C$. См. IV.1.

5.2. Приведите уравнение кривой

$$16y^2-9x^2-32y+18x+7=0$$

к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $16(y+1)^2-9(x-1)^2=0$; ☞ $16(y-1)^2-9(x-1)^2=1$;

☞ $16(y-1)^2-9(x-1)^2=0$; ☞ $4(y-1)^2-9(x+1)^2=1$.

🕮 Выделите полный квадрат. См. IV.2; IV.2 (б).

Задача 6

Исследуйте уравнение $y=9x^2-6x+2$.

6.1. Определите, какой тип кривой задан уравнением

$$y=9x^2-6x+2.$$

☞ эллипс; ☞ парабола; ☞ гипербола.

🕮 Исследуйте знак произведения $A\cdot C$. См. IV.1.

6.2. Приведите уравнение кривой $y = 9x^2 - 6x + 2$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $(x-1/3)^2 = (y+1)/9$; ☞ $(x-1/3)^2 = (y-1)/9$;

☞ $(x+1/3)^2 = (y-1)/9$.

🕮 См. IV. 2 (в).

6.3. Найдите координаты фокуса параболы $y = 9x^2 - 6x + 2$, значение параметра и укажите верный ответ:

☞ $F(1/3,\ 1+1/36),\ p = 1/18$;

☞ $F(1/3,\ 1+1/36),\ p = 1/9$;

☞ $F(1/3,\ 1+1/18),\ p = 1/18$.

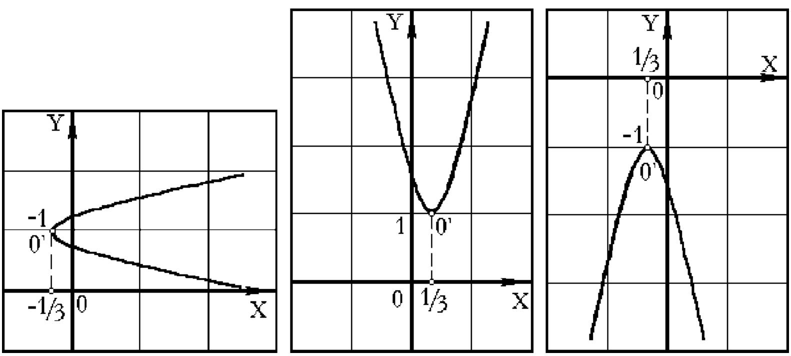
🕮 См. III.1

6.4. Напишите уравнение директрисы параболы $y = 9x^2 - 6x + 2$ и укажите верный ответ:

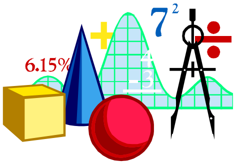
☞ y = 35/36; ☞ y = 37/36; ☞ x = 35/36.

🕮 См. III.2.

6.5. Постройте кривую и укажите верный ответ:



🕮 См. III.1.



Задача 7

Исследуйте уравнение $9x^2-25y^2+50y+200=0$.

7.1. Определите, какой тип кривой задан уравнением $9x^2-25y^2+50y+200=0$. Укажите верный ответ:

☞ эллипс; ☞ парабола; ☞ гипербола.

🕮 Исследуйте знак произведения $A\cdot C$. См. IV.1.

7.2. Приведите уравнение кривой $9x^2-25y^2+50y+200=0$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $(y-1)^2/9-x^2/25=1$;

☞ $(y+1)^2/9-x^2/25=1$;

☞ $(y+1)^2/25-x^2/9=1$;

☞ $(y-1)^2/25-x^2/9=1$.

🕮 Выделите полный квадрат. См. IV.2; IV.2 (б).

7.3. Найдите координаты фокусов этой гиперболы и укажите верный ответ:

☞ $\left(0;\, 1+\sqrt{34}\right)$; $\left(0;\, 1-\sqrt{34}\right)$;

☞ $\left(0;\, \sqrt{34}\right)$; $\left(0;\, -\sqrt{34}\right)$;

☞ $\left(0;\, -1+\sqrt{34}\right)$; $\left(0;\, -1-\sqrt{34}\right)$.

🕮 См. II.1.

7.4. Найдите эксцентриситет гиперболы $(y-1)^2/9-x^2/25=1$ и укажите верный ответ:

☞ $\sqrt{34}/3$; ☞ $\sqrt{34}/5$; ☞ $3/\sqrt{34}$. .

🕮 См. II.2.

7.5. Напишите уравнение директрис гиперболы $(y-1)^2/9-x^2/25=1$ и укажите верный ответ:

☞ $y=1+9/\sqrt{34}$; $y=1-9/\sqrt{34}$;

☞ $y=-1+9/\sqrt{34}$; $y=-1-9/\sqrt{34}$;

☞ $y=1+\sqrt{34}/9$; $y=1-\sqrt{34}/9$.

🕮 См. II.3.

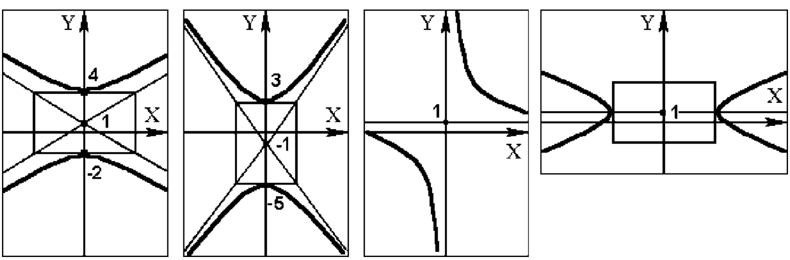
7.6. Составьте уравнения асимптот гиперболы $(y-1)^2/9-x^2/25=1$ и укажите верный ответ:

☞ $y-1=\pm 3x/5$; ☞ $y+1=\pm 3x/5$;

☞ $y=\pm 3(x-1)/5$; ☞ $y-1=\pm 5x/3$.

🕮 См. II.4.

7.7. Постройте график кривой $(y-1)^2/9-x^2/25=1$:



🕮 См. II.1.

Задача 8

Исследуйте уравнение $25y^2-4x-50y+9=0$.

8.1. Определите, какой тип кривой задан уравнением $25y^2-4x-50y+9=0$. Укажите верный ответ:

☞ гипербола; ☞ парабола; ☞ эллипс.

🕮 Исследуйте знак произведения $A\cdot C$. См. IV.1.

8.2. Приведите уравнение кривой $25y^2-4x-50y+9=0$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $(y-1)^2=\frac{4}{25}(x+4)$; ☞ $(y-1)^2=\frac{2}{5}(x+4)$;

☞ $(y+1)^2=\frac{4}{25}(x+4)$.

🕮 См. IV.2 (в).

8.3. Найдите координаты фокуса параболы и значение параметра и укажите верный ответ:

☞ $F\left(-3\frac{24}{25};1\right)$, $p=\frac{2}{25}$; ☞ $F\left(-3\frac{24}{25};-1\right)$, $p=\frac{4}{25}$;

☞ $F\left(-3\frac{24}{25};1\right)$, $p=\frac{4}{5}$.

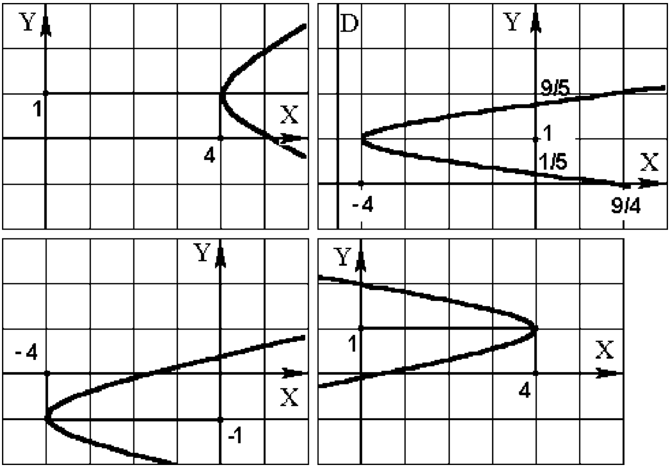
🕮 См. III.1.

8.4. Напишите уравнение директрисы параболы $(y-1)^2=\frac{4}{25}(x+4)$ и укажите верный ответ:

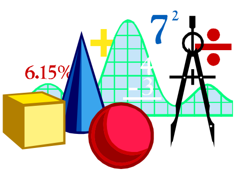
☞ $x=-101/25$; ☞ $x=-4$; ☞ $x=-99/25$.

🕮 См. III.2.

8.5. Постройте кривую $(y-1)^2 = 4/25(x+4)$ и укажите верный ответ:



📖 См. III.1.



Задача 9

Исследуйте уравнение $3x^2 + 6x + 4y^2 - 8y - 5 = 0$.

9.1. Определите, какой тип кривой задан уравнением $3x^2 + 6x + 4y^2 - 8y - 5 = 0$. Укажите верный ответ:

☞ парабола; ☞ гипербола; ☞ эллипс.

📖 Исследуйте знак произведения $A \cdot C$. См. IV.1.

9.2. Приведите уравнение кривой $3x^2+6x+4y^2-8y-5=0$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $(x+1)^2/4+(y-1)^2/3=1$;

☞ $(x+1)^2/3+(y-1)^2/4=1$;

☞ $(x-1)^2/4+(y-1)^2/3=1$;

☞ $(x-1)^2/3+(y+1)^2/4=1$.

🕮 Выделите полный квадрат. См. IV.2; IV.2 (а).

9.3. Найдите координаты фокусов эллипса $(x+1)^2/4+(y-1)^2/3=1$ и укажите верный ответ:

☞ $F_1(0;\ 1)$; $F_2(-2;\ 1)$;

☞ $F_1(-1;\ 0)$; $F_2(-1;\ 2)$;

☞ $F_1(0;\ -1)$; $F_2(-2;\ -1)$.

🕮 См. I.1.

9.4. Найдите эксцентриситет эллипса $(x+1)^2/4+(y-1)^2/3=1$ и укажите верный ответ:

☞ $1/2$; ☞ $1/\sqrt{3}$; ☞ $2/\sqrt{3}$.

🕮 См. I.2.

9.5. Напишите уравнение директрис эллипса $(x+1)^2/4+(y-1)^2/3=1$ и укажите верный ответ:

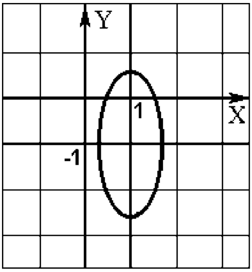
☞ $x=3$ и $x=-5$;

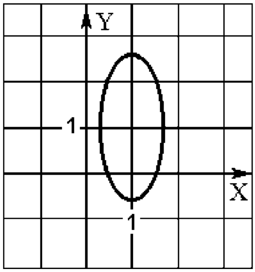
☞ $x=5$ и $x=-3$;

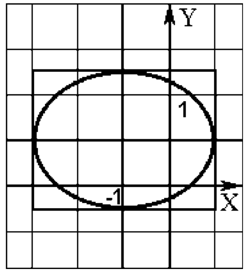
☞ $x=-1+2\sqrt{3}$ и $x=-1-2\sqrt{3}$.

🕮 См. I.3.

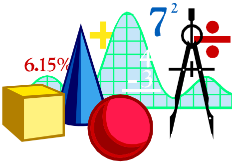
9.6. Постройте эту кривую и укажите верный ответ:







🕮 См. I.1.



Задача 10

Исследуйте уравнение $y = 3 - 3\sqrt{x^2 + 8x + 26}$.

10.1. Определите к какой системе уравнений равносильно уравнение $y = 3 - 3\sqrt{x^2 + 8x + 26}$. Укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} y - 3 \le 0 \\ (y-3)^2 = 9\left(x^2 + 8x + 26\right); \end{cases}$

☞ $\begin{cases} y - 3 \ge 0 \\ (y-3)^2 = 9\left(x^2 + 8x + 26\right); \end{cases}$

☞ $\begin{cases} (y - 3) \le 0 \\ (y-3)^2 = 3\left(x^2 + 8x + 26\right). \end{cases}$

🕮 См. V.2.

10.2. Приведите уравнение кривой $y = 3 - 3\sqrt{x^2 + 8x + 26}$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} (y-3)^2 \big/ 90 - (x+4)^2 \big/ 10 = 1 \\ y - 3 \le 0; \end{cases}$

☞ $\begin{cases} y - 3 \ge 0 \\ (y-3)^2 \big/ 90 - (x+4)^2 \big/ 10 = 1; \end{cases}$

☞ $\begin{cases} y - 3 \le 0 \\ (y-3)^2 \big/ 10 - (x+4)^2 \big/ 10 = 1. \end{cases}$

🕮 См. V.2; V.2 (а).

10.3. Определите, какой тип кривой задан этой системой. Укажите верный ответ:

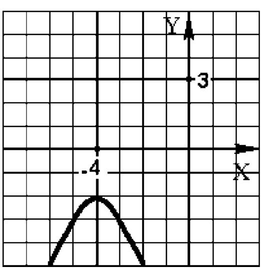
☞ часть гиперболы, где $y \le 3$;

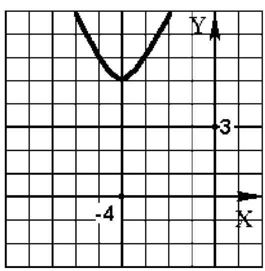
☞ часть эллипса, где $y - 3 \ge 0$;

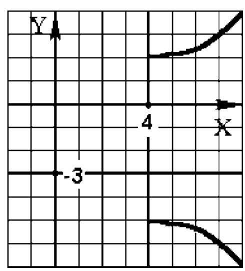
☞ часть гиперболы, где $y - 3 \ge 0$.

🕮 См. V.2 (а).

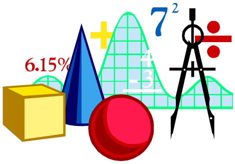
10.4. Постройте заданную кривую $y = 3 - 3\sqrt{x^2 + 8x + 26}$ и укажите верный ответ:







🕮 См. V.2 (а).



Задача 11

Исследуйте уравнение $x = 2 + \sqrt{35 - y}$.

11.1. Определите, какой системе уравнений равносильно уравнение $x = 2 + \sqrt{35 - y}$. Укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ (x-2)^2 = 35 - y; \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = 2 + (35 - y); \end{cases}$

☞ $\begin{cases} (x-2) \leq 0 \\ (x+2)^2 = y - 35. \end{cases}$

📖 См. V.1 (д).

11.2. Приведите уравнение кривой $x = 2 + \sqrt{35 - y}$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ (x-2)^2 = -(y - 35); \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ (x-2)^2 = -(y - 35); \end{cases}$

☞ $\begin{cases} x \geq 2 \\ (x+2)^2 = -(y - 35). \end{cases}$

📖 См. V.1 (д).

11.3. Определите, какой тип кривой задан системой

$$\begin{cases} (x-2)^2 = -(y-35) \\ x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

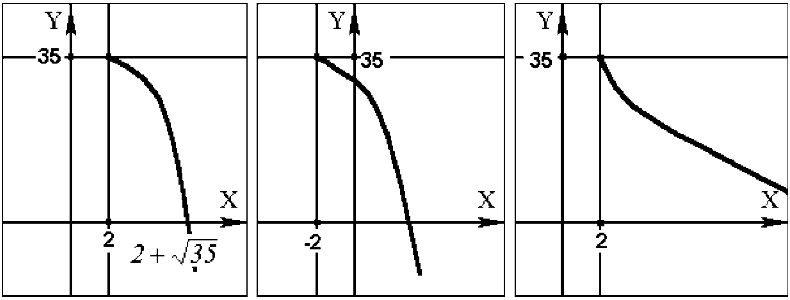
Укажите верный ответ:

☞ парабола, где $x \geq 2$; ☞ гипербола, где $x \geq -2$;

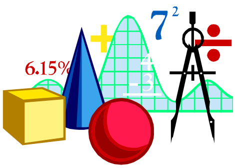
☞ парабола, где $x \leq 2$.

📖 См. V.1 (д).

11.4. Постройте заданную кривую $x = 2 + \sqrt{35 - y}$ и укажите верный ответ:



📖 См. V.1 (д).



Задача 12

Исследуйте уравнение $x = -5 + \sqrt{45 + 30y - 5y^2}$.

12.1. Определите, какой системе уравнений равносильно уравнение $x = -5 + \sqrt{45 + 30y - 5y^2}$. Укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ (x+5)^2 = 45 + 30y - 5y^2; \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} (x-5)^2 \geq 0 \\ (x-5)^2 = 45 + 30y - 5y^2; \end{cases}$

☞ $\begin{cases} x + 5 \leq 0 \\ x^2 = 5 + (45 + 30y - 5y^2). \end{cases}$

📖 См. V.1.

12.2. Приведите уравнение кривой $x=-5+\sqrt{45+30y-5y^2}$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} x+5\geq 0 \\ (x+5)^2/90+(y-3)^2/18=1; \end{cases}$

☞ $\begin{cases} x-5\geq 0 \\ (x-5)^2/90+(y-3)^2/18=1; \end{cases}$

☞ $\begin{cases} x+5\geq 0 \\ (x+5)^2/90+(y+3)^2/18=1. \end{cases}$

🕮 См. V.1.

12.3. Определите, какой тип кривой задан этой системой. Укажите верный ответ:

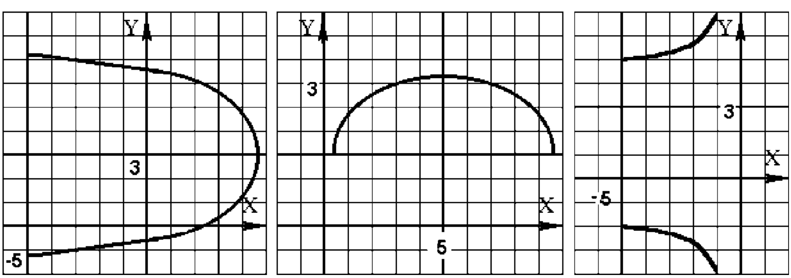
☞ часть гиперболы, где $x+5\geq 0$;

☞ часть эллипса, где $x\geq -5$;

☞ часть эллипса, где $x\leq 5$.

🕮 См. V.1 (б).

12.4. Постройте заданную кривую $x=-5+\sqrt{45+30y-5y^2}$ и укажите верный ответ:



🕮 См. V.1 (б).

Задача 13

Исследуйте уравнение $2y = 1 - 4\sqrt{x-1}$.

13.1. Определите, какой системе уравнений равносильно уравнение $2y = 1 - 4\sqrt{x-1}$. Укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} y - 1/2 \le 0 \\ 4(y - 1/2)^2 = 16(x-1); \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} 2y \le 1 \\ (2y-1)^2 = 4(x-1); \end{cases}$

☞ $\begin{cases} 2y \ge 1 \\ 4y^2 = 1 + 4(x-1). \end{cases}$

🕮 См. V.2 (д).

13.2. Приведите уравнение кривой $2y = 1 - 4\sqrt{x-1}$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} y - 1/2 \le 0 \\ (y - 1/2)^2 = 4(x-1); \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} (2y+1)^2 = 2(x-1) \\ y \ge 1/2; \end{cases}$

☞ $\begin{cases} y \ge 1/2 \\ (2y+1)^2 = 16(x-1). \end{cases}$

🕮 См. V.2 (д).

13.3. Определите, какой тип кривой задан этой системой. Укажите верный ответ:

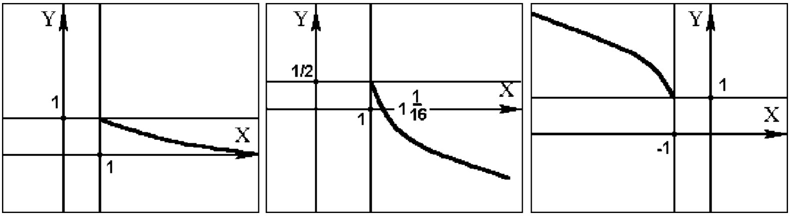
☞ часть гиперболы, где $y \ge 1/2$;

☞ часть параболы, где $y \le 1/2$;

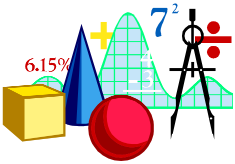
☞ часть параболы, где $y \ge 1/2$.

🕮 См. V.2 (д).

13.4. Постройте заданную кривую $2y=1-4\sqrt{x-1}$ и укажите верный ответ:



📖 См. V.2 (д).



Задача 14

Исследуйте уравнение $x=-\sqrt{18y-9y^2-8}$.

14.1. Определите, какой системе уравнений равносильно уравнение $x=-\sqrt{18y-9y^2-8}$. Укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} y>0 \\ x^2=18y-9y^2-8; \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} x\le 0 \\ x^2=9y^2-18y+8; \end{cases}$

\+ $\begin{cases} x\le 0 \\ x^2=18y-9y^2-8. \end{cases}$

📖 См. V.2.

14.2. Приведите уравнение кривой $x=-\sqrt{18y-9y^2-8}$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} x\ge 0 \\ \dfrac{x^2}{1}+\dfrac{(y-1)^2}{1/9}=1; \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{1}+\dfrac{(y+1)^2}{1/9}=1; \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{1}+\dfrac{(y-1)^2}{1/9}=1. \end{cases}$

📖 См. V.2.

14.3. Определите, какой тип кривой задан системой

$$\begin{cases} x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{(y-1)^2}{1/9} = 1. \end{cases}$$

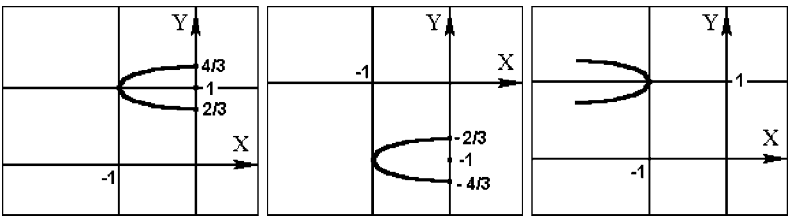
Укажите верный ответ:

☞ часть эллипса, где $y \le 0$; ☞ часть гиперболы, где $x \ge 0$;

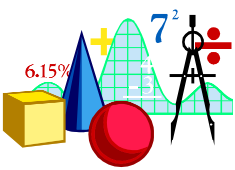
☞ часть эллипса, где $x \le 0$.

См. V.2 (б).

14.4. Постройте заданную кривую $x = -\sqrt{18y - 9y^2 - 8}$ и укажите верный ответ:



См. V.2 (б).



Задача 15

Исследуйте уравнение $(y-1) = \frac{2}{5}\sqrt{x+4}$.

15.1. Определите, какой системе уравнений равносильно уравнение $(y-1) = \frac{2}{5}\sqrt{x+4}$. Укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} y \ge -1 \\ (y+1)^2 = 4(x+4)/25; \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} y \ge -1 \\ (y-1)^2 = 4(x+4)/25; \end{cases}$

☞ $\begin{cases} y-1 \ge 0 \\ (y-1)^2 = 2(x+4)/5. \end{cases}$

🕮 См. V.1 (д).

15.2. Приведите уравнение кривой $(y-1) = \frac{2}{5}\sqrt{x+4}$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} y-1 \ge 0 \\ (y-1)^2 = 2(x+4)/5; \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} (y-1) \ge 0 \\ (y-1)^2 = 4(x+4)/25; \end{cases}$

☞ $\begin{cases} y+1 \ge 0 \\ (y+1)^2 = 4(x+4)/5. \end{cases}$

🕮 См. V.1 (д).

15.3. Определите, какой тип кривой задан системой

$$\begin{cases} (y-1) \ge 0 \\ (y-1)^2 = 4(x+4)/25. \end{cases}$$

Укажите верный ответ:

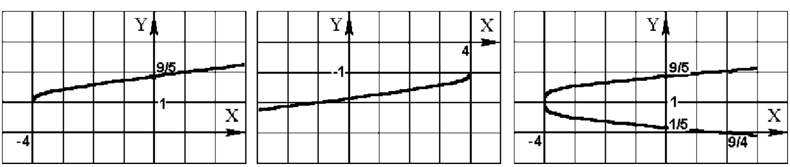
☞ часть параболы, где $x \ge 0$;

☞ часть гиперболы, где $y \ge -1$;

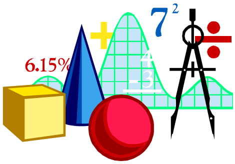
☞ часть параболы, где $y \ge 1$.

🕮 См. V.1 (д).

15.4. Постройте заданную кривую и укажите верный ответ:



🕮 См. V.1 (д).



Задача 16

Исследуйте уравнение $x = 3 + \frac{3}{2}\sqrt{y^2 - 2y - 3}$.

16.1. Определите, какой системе уравнений равносильно уравнение $x = 3 + \frac{3}{2}\sqrt{y^2 - 2y - 3}$. Укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ (x-3)^2 = 9\left(y^2 - 2y - 3\right)/4; \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} x + 3 \ge 0 \\ (x+3)^2 = 3\left(y^2 - 2y - 3\right)/2; \end{cases}$

☞ $\begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ (x-3)^2 = 1\left(y^2 - 2y - 3\right)/4. \end{cases}$

🕮 См. V.1.

16.2. Приведите уравнение кривой $x = 3 + 3/2\sqrt{y^2 - 2y - 3}$ к каноническому виду и укажите верный ответ:

☞ $\begin{cases} x + 3 \ge 0 \\ (x+3)^2/9 - (y-1)^2/4 = 1; \end{cases}$ ☞ $\begin{cases} x \ge 3 \\ (y-1)^2/4 - (x-3)^2/9 = 1; \end{cases}$

☞ $\begin{cases} x \ge 3 \\ (y-1)^2/9 - (x-3)^2/4 = 1. \end{cases}$

🕮 См. V.1 (а).

16.3. Определите, какой тип кривой задан системой

$$\begin{cases} x \ge 3 \\ (y-1)^2/4 - (x-3)^2/9 = 1. \end{cases}$$

Укажите верный ответ:

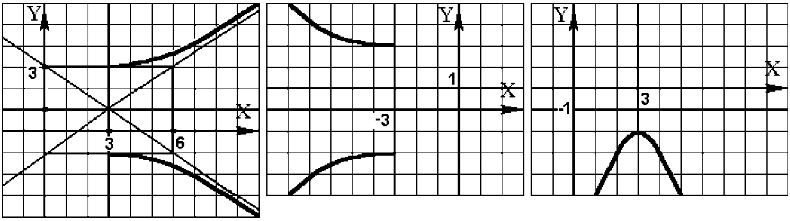
☞ часть эллипса, где $x \ge 3$;

☞ часть гиперболы, где $y \ge 0$;

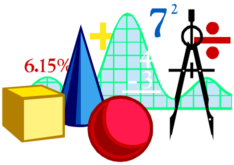
☞ часть гиперболы, где $x \ge 3$.

🕮 См. V.1 (а).

16.4. Постройте заданную кривую $x = 3 + \frac{3}{2}\sqrt{y^2 - 2y - 3}$ и укажите верный ответ:



См. V.1 (а).



Задача 17

Исследуйте форму эллипсов:

1) $9x^2 - 18x + 4y^2 - 16y - 11 = 0$;

2) $9x^2 - 18x + 2y^2 - 8y - 1 = 0$;

3) $9x^2 + 5y^2 - 18x - 20y - 16 = 0$

в зависимости от значений эксцентриситета.

17.1. Приведите уравнения эллипсов к каноническому виду. Укажите верный ответ:

☞ 1) $(x-1)^2/4 + (y-2)^2/9 = 1$,
$(x-1)^2/2 + (y-2)^2/9 = 1$,
$(x-1)^2/5 + (y-2)^2/9 = 1$;

☞ 2) $(x+1)^2/4 + (y-2)^2/9 = 1$,
$(x-1)^2/3 + (y+2)^2/4 = 1$,
$(x+1)^2/2 + (y-2)^2/1 = 1$;

☞ 3) $(x-1)^2/2+(y-2)^2/3=1$,

$(x+1)^2/1+(y-2)^2/4=1$,

$(x+1)^2/2+(y-2)^2/4=1$.

🕮 См. IV.2; IV.2 (а).

17.2. Найдите эксцентриситет эллипсов:

1) $9x^2-18x+4y^2-16y-11=0$;

2) $9x^2-18x+2y^2-8y-1=0$;

3) $9x^2+5y^2-18x-20y-16=0$.

Укажите верный ответ:

☞ 1) $\varepsilon=\sqrt{5}/3$; 2) $\varepsilon=\sqrt{7}/3$; 3) $\varepsilon=2/3$;

☞ 1) $\varepsilon=\sqrt{5}/3$; 2) $\varepsilon=1/2$; 3) $\varepsilon=1/\sqrt{2}$;

☞ 1) $\varepsilon=1/\sqrt{3}$; 2) $\varepsilon=\sqrt{3}/2$; 3) $\varepsilon=\sqrt{2}/2$.

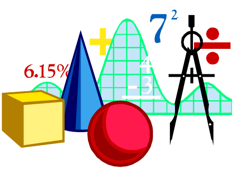
🕮 См. I.2.

17.3. Определите, при каком значении эксцентриситета график расположен ближе к большой полуоси. Укажите верный ответ:

☞ $\sqrt{7}/3$; ☞ $2/3$; ☞ $\sqrt{5}/3$.

Сделайте рисунок.

🕮 См. I.2.



Задача 18

Исследуйте в зависимости от значения эксцентриситета форму гипербол:

1) $4x^2-16x-9y^2+18y-29=0$;

2) $3x^2-9y^2-12x+18y-24=0$;

3) $2x^2-9y^2-8x+18y-19=0$.

18.1. Приведите уравнения гипербол к каноническому виду. Укажите верный ответ:

☞ 1) $(x-2)^2/9-(y-1)^2/4=1$,

$(x-2)^2/9-(y-1)^2/3=1$,

$(x-2)^2/9-(y-1)^2/2=1$;

☞ 2) $(x+2)^2/9-(y-1)^2/4=1$,

$(x-2)^2/9-(y+1)^2/3=1$,

$(x-1)^2/9-(y-1)^2/1=1$;

☞ 3) $(x-2)^2/9-(y-1)^2/2=1$,

$(x-2)^2/9-(y-1)^2/3=1$,

$(x+2)^2/9-(y-1)^2/1=1$.

📖 См. IV.2; IV.2 (б).

18.2. Найдите эксцентриситет гипербол. Укажите верный ответ:

☞ 1) $\varepsilon=\sqrt{13}/3$; 2) $\varepsilon=\sqrt{12}/3$; 3) $\varepsilon=\sqrt{11}/3$;

☞ 1) $\varepsilon=\sqrt{13}/3$; 2) $\varepsilon=\sqrt{12}/3$; 3) $\varepsilon=\sqrt{10}/\sqrt{3}$;

☞ 1) $\varepsilon=\sqrt{11}/3$; 2) $\varepsilon=\sqrt{10}/3$; 3) $\varepsilon=\sqrt{12}/3$.

📖 См. II.2.

18.3. Определите, при каком значении эксцентриситета график расположен ближе к действительной полуоси. Укажите верный ответ:

☞ $\varepsilon=\sqrt{11}/3$; ☞ $\varepsilon=\sqrt{13}/3$; ☞ $\varepsilon=\sqrt{12}/3$.

Сделайте рисунок.

📖 Сравните эксцентриситеты.

ОТВЕТЫ

1.1. Это уравнение эллипса.

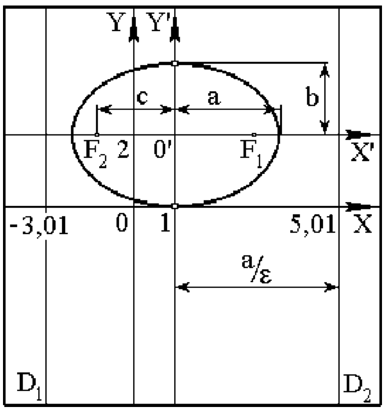
1.2. $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$.

1.3. $F_1\left(1+\sqrt{5};2\right)$, $F_2\left(1-\sqrt{5};2\right)$.

1.4. $\sqrt{5}\big/3$.

1.5. $D_2:\ x=1+9\big/\sqrt{5}$; $D_1:\ x=1-9\big/\sqrt{5}$.

1.6.



2.1. Это уравнение эллипса.

2.2. $(x-1)^2+(y+2)^2=0$. Эллипс выродился в точку $(1;-2)$.

3.1. Это уравнение эллипса.

3.2. $(x+2)^2+y^2=-1$ — мнимый эллипс.

4.1. Это гипербола.

4.2. $(x+1)^2\big/9-(y-2)^2=1$ — уравнение гиперболы.

4.3. $\left(-1+\sqrt{10};2\right)$; $\left(-1-\sqrt{10};2\right)$.

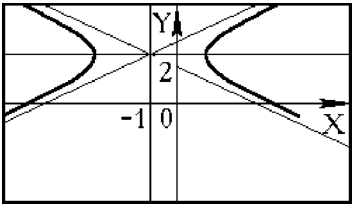
4.4. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=\sqrt{10}\big/3$.

4.5. Уравнения директрис:

$$D_2:\ x=-1+9\big/\sqrt{10},\quad D_1:\ x=-1-9\big/\sqrt{10}.$$

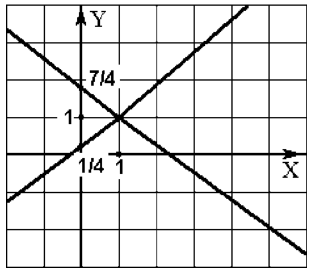
4.6. Уравнения асимптот гиперболы $y-2=\pm(x+1)/3$.

4.7.



5.1. Это гипербола.

5.2. Каноническое уравнение гиперболы $(y-1)^2/9-(x-1)^2/16=0$ — случай вырождения в пару пересекающихся прямых, т. е. $y-1=\pm\frac{3}{4}(x-1)$.



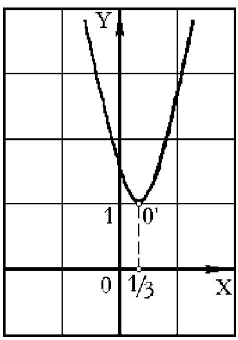
6.1. Это парабола.

6.2. Канонический вид параболы $(x-1/3)^2=(y-1)/9$.

6.3. $F(1/3;\ 37/36)$ и значение параметра $p = 1/18$.

6.4. Уравнение директрисы $y = 35/36$.

6.5.



7.1. Это гипербола.

7.2. $(y-1)^2/9-x^2/25=1$ — уравнение гиперболы.

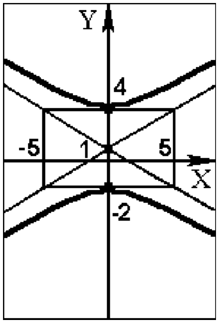
7.3. $\left(0;\ 1+\sqrt{34}\right)$; $\left(0;\ 1-\sqrt{34}\right)$.

7.4. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=\sqrt{34}/3$.

7.5. $D_1: \ y = 1 - 9/\sqrt{34}$; $\quad D_2: \ y = 1 + 9/\sqrt{34}$.

7.6. $y - 1 = \pm 3x/5$.

7.7.



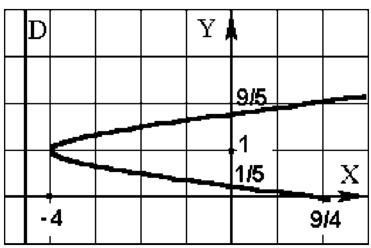
8.1. Это парабола.

8.2. Канонический вид параболы $(y-1)^2 = \dfrac{4}{25}(x+4)$.

8.3. $F\left(-3\dfrac{24}{25}, 1\right)$, значение параметра $p = \dfrac{2}{25}$.

8.4. $x = -101/25$.

8.5. График параболы $(y-1)^2 = \dfrac{4}{25}(x+4)$ имеет вид:



9.1. Это уравнение эллипса.

9.2. Канонический вид уравнения эллипса:

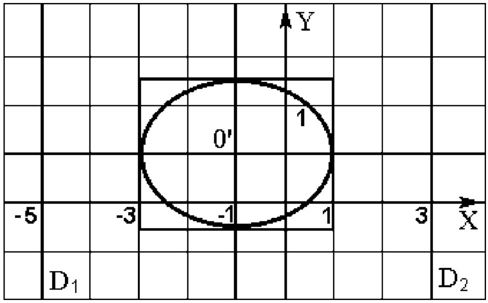
$$(x+1)^2/4 + (y-1)^2/3 = 1.$$

9.3. $F_1(0;\ 1)$; $F_2(-2;\ 1)$.

9.4. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = 1/2$.

9.5. $D_1: \ x=-5; \quad D_2: \ x=3$.

9.6. График эллипса $(x+1)^2/4+(y-1)^2/3=1$ имеет вид:

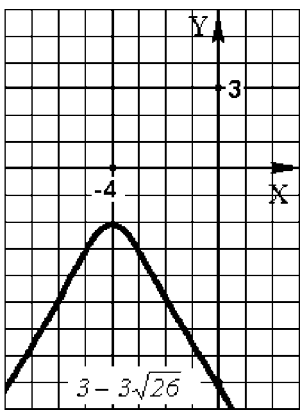


10.1. $\begin{cases} y-3 \le 0 \\ (y-3)^2 = 9(x^2+8x+26). \end{cases}$

10.2. $\begin{cases} y-3 \le 0 \\ (y-3)^2/90-(x+4)^2/10=1. \end{cases}$

10.3. Это та часть гиперболы, где $y \le 3$.

10.4. Кривая, заданная уравнением $y=3-3\sqrt{x^2+8x+26}$, имеет вид:

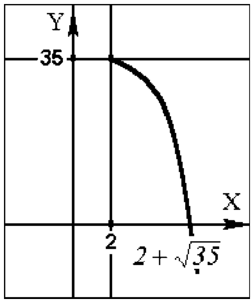


11.1. $\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ (x-2)^2 = 35-y. \end{cases}$

11.2. $\begin{cases} (x-2)^2 = -(y-35) \\ x-2 \ge 0. \end{cases}$

11.3. Та часть параболы, где $x \ge 2$.

11.4. Кривая, заданная уравнением имеет вид:

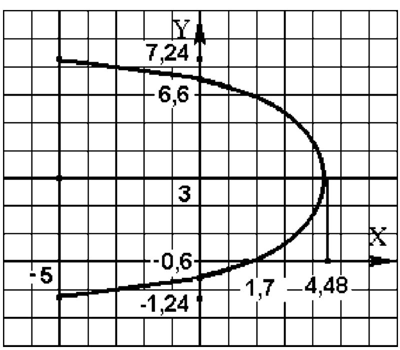


12.1. $\begin{cases} x+5 \ge 0 \\ (x+5)^2 = 45+30y-5y^2. \end{cases}$

12.2. $\begin{cases} x+5 \ge 0 \\ (x+5)^2 /90+(y-3)^2 /18=1. \end{cases}$

12.3. Та часть эллипса, где $x \ge -5$.

12.4. Кривая, заданная уравнением $x=-5+\sqrt{45+30y-5y^2}$, имеет вид:

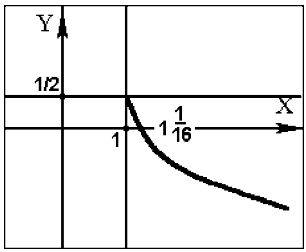


13.1. $\begin{cases} y \le 1/2 \\ 4(y-1/2)^2 = 16(x-1). \end{cases}$

13.2. $\begin{cases} y-1/2\le 0 \\ (y-1/2)^2 = 4(x-1). \end{cases}$

13.3. Та часть параболы, где $y \le 1/2$.

13.4. Кривая, заданная уравнением $2y = 1-4\sqrt{x-1}$ имеет вид:

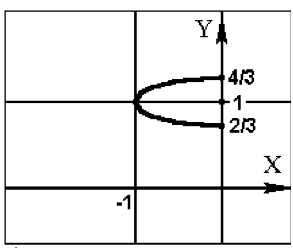


14.1. $\begin{cases} x\le 0 \\ x^2 = 18y-9y^2-8. \end{cases}$

14.2. $\begin{cases} x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{1}+\dfrac{(y-1)^2}{1/9}=1. \end{cases}$

14.3. Та часть эллипса, где $x \le 0$.

14.4. Кривая, заданная уравнением $x = -\sqrt{18y-9y^2-8}$, имеет вид:

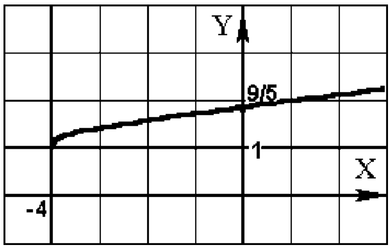


15.1. $\begin{cases} y-1\ge 0 \\ (y-1)^2 = 4(x+4)/25. \end{cases}$

15.2. $\begin{cases} (y-1)\ge 0 \\ (y-1)^2 = 4(x+4)/25. \end{cases}$

15.3. Часть параболы, где $y-1\ge 0$.

15.4. Кривая, заданная уравнением $(y-1)=\dfrac{2}{5}\sqrt{x+4}$, имеет вид:

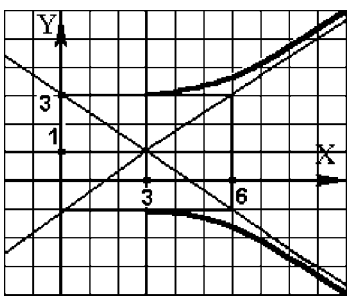


16.1. $\begin{cases} x-3\ge 0 \\ (x-3)^2 = 9(y^2-2y-3)/4. \end{cases}$

16.2. $\begin{cases} x\ge 3 \\ (y-1)^2/4-(x-3)^2/9=1. \end{cases}$

16.3. Часть гиперболы, где $x\ge 3$.

16.4. Кривая, заданная уравнением $x=3+\dfrac{3}{2}\sqrt{y^2-2y-3}$, имеет вид:



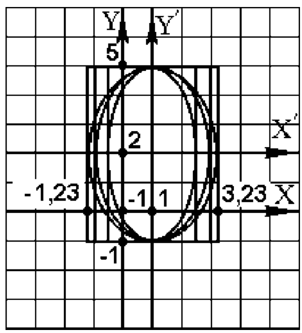
17.1. $(x-1)^2/4+(y-2)^2/9=1;$

$(x-1)^2/2+(y-2)^2/9=1;$

$(x-1)^2/5+(y-2)^2/9=1.$

17.2. 1) $\varepsilon=\sqrt{5}/3;$ 2) $\varepsilon=\sqrt{7}/3;$ 3) $\varepsilon=2/3.$

17.3. $\varepsilon=\sqrt{7}/3.$



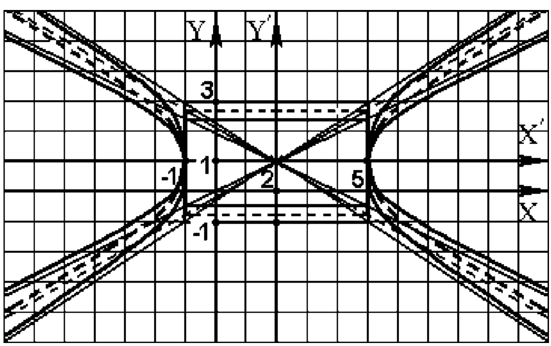
18.1. $(x-2)^2/9-(y-1)^2/4=1;$

$(x-2)^2/9-(y-1)^2/3=1;$

$(x-2)^2/9-(y-1)^2/2=1.$

18.2. 1) $\varepsilon=\sqrt{13}/3;$ 2) $\varepsilon=\sqrt{12}/3;$ 3) $\varepsilon=\sqrt{11}/3.$

18.3. $\varepsilon=\sqrt{11}/3.$



УДК 517.5+574.12
ББК 22.161
Г81

Грешилов А.А., Белова Т.И.

Г81 Аналитическая геометрия. Векторная алгебра. Кривые второго порядка: Компьютерный курс/Под ред. А.А. Грешилова: Учеб. пособие. – М.: Логос, 2004. – 128 с.: ил.

ISBN 5-94010-204-2

Содержит курс аналитической геометрии, векторной алгебры и кривых второго порядка. Рассмотрены: деление отрезка в данном отношении, различные виды уравнения прямой, расстояние от точки до прямой; различные виды уравнений прямой и плоскости в пространстве, признаки параллельности и ортогональности прямых и плоскостей, расстояние от точки до плоскости и т.д. Описываются простейшие операции над векторами (сложение и вычитание векторов, умножение векторов на число и т.п.). Даны скалярное и векторное произведения двух векторов, смешанное произведение трех векторов. Исследуются геометрические свойства линий, определяемых в декартовых координатах алгебраическими уравнениями второй степени: свойства эллипса, гиперболы, параболы. Весь учебный материал представлен на лазерном диске, обеспечивающем организацию аудиторных и самостоятельных занятий на компьютере в интерактивном режиме.

Для студентов высших и средних специальных учебных заведений. Может использоваться в дистанционном обучении, а также в учебном процессе старших классов общеобразовательных школ математического и естественнонаучного профиля.

ББК 22.161

ISBN 5-94010-204-2